6.1.1 Corde-Exercice 9

Une corde métallique confondue avec l'axe Ox lorsqu'elle est au repos est tendue avec une tension T.
Sa longueur est L, sa masse linéique μ et elle est fixée en ses deux extrémités x = 0 et x = L.
La corde est parcourue par un courant $I = I_0\cos(\omega t)$ et placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\, sin(\pi x/L)\vec{u}_y$
L'effet du champ de pesanteur est négligé.

a-Evaluer la force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément $d\vec{\ell}$ de corde. Que permet-elle de prévoir sur le mouvement de la corde ?

b-Etablir l'équation de propagation vérifiée par les petits déplacements z(x,t) de la corde et commenter.

c-Justifier la recherche d'une solution de la forme $z(x,t) = Asin(\frac{\pi x}{L})cos(\omega t)$. Déterminer son amplitude A et discuter la possibilité d'une résonance.

6.1.1 Corde-Exercice 9

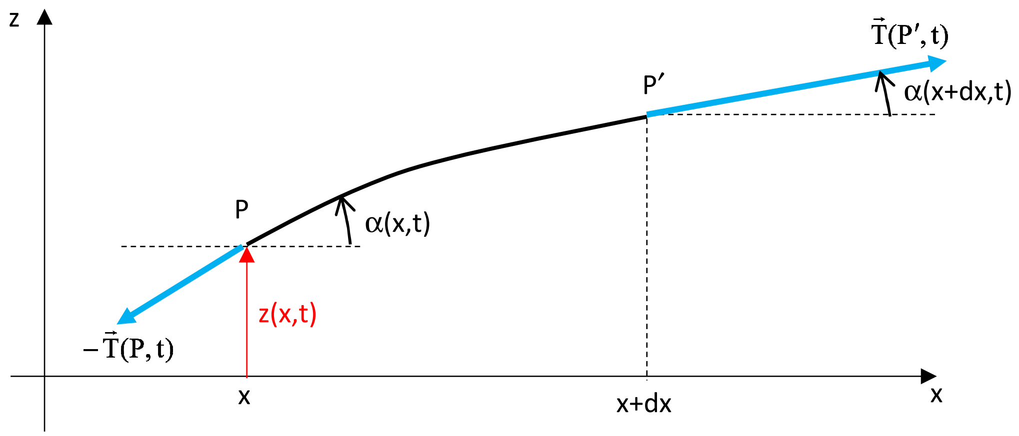
---

a-Force de Laplace élémentaire : $d\vec{F}_L = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = Idx\vec{u}_x \wedge B_0\, sin(\frac{\pi x}{L})\vec{u}_y = IdxB_0\, sin(\frac{\pi x}{L})\vec{u}_z$

Soit : $\boxed{d\vec{F}_L = IdxB_0\, sin(\frac{\pi x}{L})\vec{u}_z}$

La corde va se déplacer dans le plan Oxz

b-



Système : L'élément de corde PP', de masse $dm = \mu dx$, situé entre x et x+dx au repos

Actions extérieures : • tension $\vec{T}(P',t)$ exercée par la partie droite de la corde
• tension $-\vec{T}(P,t)$ exercée par la partie gauche de la corde
• la force de Laplace élémentaitre $d\vec{F}_L$

Loi de la quantité de mouvement en projection selon l'axe Oz :

$dm\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) = -T\sin\alpha\,(x,t) + T\sin\alpha\,(x+dx,t) + IdxB_0\, sin(\frac{\pi x}{L})$

Petites déformations => sinα ≈ α et $tan\,\alpha\,(x,t) \approx \alpha(x,t)$ avec $tan\,\alpha\,(x,t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,t)$

$\mu dx\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) = T[\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)] + IdxB_0\, sin(\frac{\pi x}{L}) = T\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,t)dx + IdxB_0\, sin(\frac{\pi x}{L})$

Donc : $\mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) = T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + IB_0\, sin(\frac{\pi x}{L})$

Que l'on écrit sous la forme : $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) - \frac{IB_0}{T}sin\,(\frac{\pi x}{L})}$ avec : $\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$ (m.s^{-1})

On ne retrouve pas l'équation d'onde classique de D'Alembert à une dimension.

c-On cherche une solution du type onde plane stationnaire car il y a deux conditions aux limites.

On reporte $z(x,t) = Asin(\frac{\pi x}{L})cos(\omega t)$ dans l'équation de propagation :

$-A\frac{\pi^2}{L^2}sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)cos(\omega t) = -\frac{\omega^2}{c^2}Asin\left(\frac{\pi x}{L}\right)cos(\omega t) - \frac{I_0B_0}{T}cos\,(\omega t)sin\,(\frac{\pi x}{L})$

D'où : $\boxed{A = \frac{\frac{I_0B_0}{T}}{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}}$

Il peut y avoir une résonance pour $\boxed{\omega = \frac{\pi c}{L}}$ car alors l'amplitude tend en théorie vers l'infini.

En pratique elle ne tend pas vers l'infini à cause des phénomènes négligés (frottement, raideur de la corde…)
