MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2024/2025.

DL n° 4.

Jeudi 5 juin.

À rendre le mercredi 11.

Problème

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 1

1. Déterminez le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.
2. Que vaut la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'elle converge ? En déduire qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

Partie 2

On suppose dans cette partie que $u_0 > 0$.

1. Montrez que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$
Soient $k, p, n \in \mathbb{N}$.
   (a) Exprimez $v_{p+k+1} - v_{p+k}$ en fonction de u_{p+k}.
   (b) En déduire que
$$0 \leqslant v_{p+k+1} - v_{p+k} \leqslant \frac{\ln(1 + 1/u_p)}{2^{p+k+1}}.$$
3. En déduire que
$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_p \leqslant \frac{\ln(1 + 1/u_p)}{2^p}.$$
(On pourra effectuer une somme sur k.)
4. (a) Montrez à l'aide de la question 3 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_{n+1} \leqslant \ln(u_0) + \ln(1 + 1/u_0).$$
   (b) Montrez à l'aide de la question 3 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   On note α la limite de la suite (v_n).

5. (a) Montrez qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > 1$.
   (b) Comparez v_N et α. En déduire que $\alpha > 0$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrez que
   $$0 \leqslant \alpha - v_p \leqslant \frac{\ln(1 + 1/u_p)}{2^p}.$$
   (b) En déduire que
   $$1 \leqslant \frac{e^{2^p\alpha}}{u_p} \leqslant 1 + \frac{1}{u_p},$$
   et déterminez
   $$\lim_{p\to+\infty} e^{-2^p\alpha}u_p.$$

Partie 3

On conserve les notations de la partie 2. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = e^{2^n\alpha} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$u_n \leqslant e^{2^n\alpha} \leqslant u_n + 1.$$
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrez que
   $$w_{n+1} = -w_n^2 + w_n + (2w_n - 1)e^{2^n\alpha}$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrez que
   $$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}.$$
   On pourra pour cela remarquer que $2w_n - 1 = 2(w_n - 1/2)$ dans l'égalité précédente.

Partie 4

On suppose ici que $u_0 < -1$. Montrez que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-2^n\alpha}u_n = 1.$$

Partie 5

On suppose dans cette partie que $-1 < u_0 < 0$.

1. Montrez que (u_n) converge vers 0.
2. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 1/u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez que la suite $(w_{n+1} - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.
3. En déduire que $w_n \sim -n$.
4. En déduire que $u_n \sim -1/n$.