Integration - série - determinant - espace préhibertien
DS9

Durée : 3h
Piste verte : faire les exercices dans l'ordre.
Piste bleue : 2 -> 3 -> 1 -> 4 -> 5
Piste Noire : 2-> 3 -> 4 -> 5 -> 1

Exercice 1 : echauffement

1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants (on ne demande pas leur somme)
   a) $u_n = \sin(\frac{1}{n})$
   b) $v_n = \frac{\cos(n) + \sin(n)}{n^2}$
   c) $w_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$
2. Soit l'application $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $\varphi : P \mapsto (X+1)P' + 3P$. On ne demande pas de montrer que φ est bien un endomorphisme.
   a) Donnez la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Justifiez que φ est un automorphisme.

---

1. a) Remarquons déjà que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$, donc $u_n \geq 0$.
   Comme $\frac{1}{n} \to 0$, on en déduit $u_n \sim \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente (série harmonique), donc par critère d'équivalence des SATP, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$
   b) On commence par dire que $|\cos(n) + \sin(n)| \leq 2$ par l'inégalité triangulaire.
   Ainsi $|v_n| \leq \frac{2}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, et donc par critère de comparaison des SATP, la série $\sum |v_n|$ converge, et donc $\sum v_n$ est absolument convergente, donc $\boxed{\text{convergente.}}$
   c) comme $n^2 w_n = \frac{\ln(n)}{n^3} \to 0$ par croissance comparée, on en déduit que $w_n = o(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$ La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, et donc par critère de domination des SATP, la $\boxed{\text{série } \sum w_n \text{ converge}}$
2. a) On calcule les images des polynômes de la base canonique :
   $\varphi(1) = 3$, $\varphi(X) = 4X + 1$ et $\varphi X^2 = 5X^2 + 2X$, ce qui donne la matrice suivante :
   $$Mat_{can}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
   b) La matrice est triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale (ou alors : de determinant $60 \neq 0$) donc elle est inversible.
   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est bijective, donc est un automorphisme.}}$

*

Exercice 2 :

1. soit $a \in \mathbb{R}$ et soit
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$
   Déterminez les valeurs de a pour lesquels M n'est pas inversible.
2. On considère les polynômes
   $$P_1 = X^2 + aX + 1, P_2 = -X^2 + X + a, P_3 = aX^2 + X + 1$$
   Déterminez l'ensemble des valeurs de $a \in \mathbb{R}$ tel que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. En ajoutant à la colonne 1 et la colonne 2, puis en développant sur la première colonne, on a

$$\begin{aligned} det(M) &= \begin{vmatrix} 1+a & a & 1 \\ 1+a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = (1+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} - (1+a)\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} \\ &= (1+a)(a+1-a^2-1) \\ det(M) &= (1+a)a(1-a) \end{aligned}$$

Ainsi M est inversible si et seulement si $a \notin \{-1;0;1\}$
autrement dit, M est non inversible si et seulement si $\boxed{a=1,\ a=0 \text{ ou } a=-1.}$

2. La matrice de (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique est M, donc (P_1, P_2, P_3) est une base si et seulement si M est inversible, ce qui est le cas si et seulement si $\boxed{a \notin \{-1;0;1\}}$

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}dt$

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Etudiez la parité de f.
3. a) Montrez que pour tout $t > 0$,
$$\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}$$
   b) en déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
   c) Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$. Que dire de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?
4. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et calculez f'.
5. On rappelle que $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
Déterminez le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

1. Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+t^2}}$. g est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est continue sur $[x, 2x]$ (si $x \geq 0$) ou $[2x, x]$ (si $x \leq 0$) et donc $\displaystyle\int_x^{2x} g(t)dt$ existe. La fonction f est donc $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}.}$

2. $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}dt$. On effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $u = -t$ (donc $du = -dt$) ce qui donne

$$f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^2}}du = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(u)^2}}du = -f(x)$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

3. a) pour tout $t > 0$, $2t > 0$, donc $4 + t^2 < 4 + 2t + t^2 = (2+t)^2$ et $4 + t^2 > t^2$. En prenant la racine dans ces inégalités (car $\sqrt{\ }$ est croissante), on obtient

$$|t| \leq \sqrt{4+t^2} \leq |t+2|$$

Par positivité de t, on peut enlever les valeurs absolues, et par passage à l'inverse, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}}$$

   b) Pour $x > 0$, $2x > x$ et par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+2}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$$

d'où

$$[\ln(t+2)]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$$

c'est à dire

$$\boxed{\ln(\frac{2x+2}{x+2}) \leq f(x) \leq \ln(\frac{2x}{x}) = \ln(2)}$$

c) Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{x+2} = 2$, on a $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x+2}{x+2}) = \ln(2)$ et par le théorème d'encadrement, on en déduit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)}$$

Par imparité, on a enfin $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ln(2).}$

4. Posons G une primitive de la fonction g que nous avons définie à la question 1. Alors G est une fonction dérivable, à dérivée de classe $\mathcal{C}^\infty$ (puisque g l'est par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$), donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Le theorème fondamental du calcul intégral donne $f(x) = G(2x) - G(x)$, et donc par somme et composition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a alors $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)$

$$\boxed{f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}}$$

5. On a $f'(x) = 2(4+4x^2)^{-\frac{1}{2}} - (4+x^2)^{-\frac{1}{2}}$.
On va utiliser $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$
Remarquons déjà, en factorisant par 4 dans chacun des termes, que

$$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

comme x^2 et $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ tendent vers 0 quand $x \to 0$, on peut substituer dans le DL et on a

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}\frac{1}{16}(x^2)^2 + o((x^2)^2) = 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8\times 16}x^4 + o(x^4)$$

et
D'où $f'(x) = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{16})x^2 + (\frac{3}{8} - \frac{3}{16\times 16})x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2} - \frac{7}{16}x^2 + \frac{93}{16\times 16}x^4 + o(x^4)$
Comme $f(0) = 0$, on conclut en primitivant le DL ce qui donne :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{48}x^3 + \frac{93}{5\times 128}x^5 + o(x^5)}$$

n

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$

1. Calculez u_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$
   a) Etudiez les variations de f_n su $[0,1]$
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$
   c) Conclure que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
3. Soit $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   a) Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n \leq \gamma.$$
   b) Déterminez a et b réels tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0;1]$, on a
   $$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$$
   c) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

d) En déduire que

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$

4. On pose maintenant

$$T_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

a) Montrez que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et précisez sa limite.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

et en déduire que la suite (T_n) est décroissante.

c) Déterminez, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.

1. Un petit banquier et c'est tout bon :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx \\ &= [x - \ln(|x+1|)]_0^1 \\ u_1 &= 1 - \ln(2) \end{aligned}$$

2. a) f_n est définie et dérivable sur $[0,1]$ par quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$.
On obtient $f_n'(x) = \dfrac{n}{(x+n)^2}$ donc $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est croissante sur } [0,1].}$

b) Comme f_n est croissante sur $[0,1]$, elle est majorée par $f_n(1) = \dfrac{1}{n+1}$
on en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

Comme $0 \leq 1$, on peut utiliser la croissance de l'intégrale pour en déduire

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx = \frac{1}{n(n+1)}$$

Enfin, $n(n+1) \geq n^2$, d'où

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}}$$

c) u_n est positive pour tout $n \geq 1$ et $u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente, donc, par critère de comparaison des SATP,

$$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$$

3. a) S_n est la somme partielle de la série $\sum u_n$, et comme $u_n \geq 0$, S_n est croissante.
On sait qu'elle converge vers γ et donc par le theorème de convergence monotone, γ est la borne supérieure de S_n, donc pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{S_n \leq \gamma}$$

b) C'est une décomposition en éléments simples un peu perturbante, puisqu'elle porte sur k et pas sur x.
Quelle que soit la méthode utilisée (mise au même dénominateur ou multiplication astucieuse), on trouve $a = 1$ et $b = -1$, c'est à dire

$$\boxed{\frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}}$$

c) Il suffit d'intégrer le résultat précédent :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k} dx \\ &= \frac{1}{k} - [\ln(|x+k|)]_0^1 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)}$

d) Il reste à remplacer et conclure par télescopage :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(1) - \ln(n+1) \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \end{aligned}$$

4. a) On sait que S_n converge, et T_n n'en est pas très loin, d'où l'idée d'utiliser un banquier pour se ramener à S_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ &= S_n + \ln(n+1) - \ln(n) T_n & &= S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{n+1}{n} \to 1$, alors $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to 0$, et comme S_n converge γ, par somme de limite,

$$\boxed{T_n \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} T_n = \gamma}$$

b) Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+{}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [n, n+1]$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $n+1 \geq n$, par croissance de l'intégrale il vient

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

d'où on déduit que

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \ln(|x|)]_n^{n+1} \leq \frac{1}{n}(n+1-n)$$

soit finalement

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}}$$

De plus, $T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

D'après l'encadrement qu'on vient d'obtenir, on en déduit (T_n) décroissante.

c) T_n est décroissante et converge vers γ, donc $\gamma \leq T_n$. La question 3*a*) donne l'autre morceau et on a donc

$$\boxed{S_n \leq \gamma \leq T_n}$$

Exercice 5 : Bonus : extrait de E3A 2024

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficient réels.

1. Soient $P, Q \in E$. On note $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
   a) Déterminez en fonction de a_p et b_q un équivalent de $P(n)Q(n)$ quand $n \to +\infty$.
   b) Montrez que la serie $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}P(n)Q(n)$ est absolument convergente.
2. Pour tous P, Q dans E, on pose
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}P(n)Q(n)$$
   a) La symétrie est évidente, mais que faut-il dire pour assurer la bilinéarité ?
   b) Montrez que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.
   c) Quel est la norme du polynôme constamment égal à 1 pour ce produit scalaire ?
3. Donnez l'ensemble de définition de $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, et donnez l'expression explicite de $f(t)$.
4. En déduire l'ensemble de définition de $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$
5. Exprimez explicitement $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$
6. On admet dans cette question que $f'(x)$, $f''(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$ sont également les sommes des séries dont les termes generaux sont les dérivées des termes de la série avant dérivation.
   Calculez $\langle 1, X\rangle$ et $\langle X, X\rangle$.

1. a) $P(n) = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k \sim a_p n^p$.
   De même $Q(n) \sim b_q n^q$
   Ainsi
$$\boxed{P(n)Q(n) \sim a_p b_q n^{p+q}}$$
   b) Remarquons déjà que $|2^{-n}P(n)Q(n)| \sim \dfrac{|a_p b_q n^{p+q}|}{2^n}$.
   De plus $n^2\dfrac{|a_p b_q n^{p+q}|}{2^n} = \dfrac{|a_p b_q n^{p+q+2}|}{2^n}$ a pour limite 0 pour $n \to +\infty$, par croissance comparée.
   On en déduit que $\dfrac{|a_p b_q n^{p+q}|}{2^n} = o(\dfrac{1}{n^2}) = O(\dfrac{1}{n^2})$ et par critère de domination des SATP, $\sum \dfrac{|a_p b_q n^{p+q}|}{2^n}$ est une série convergente.
   Ainsi $|2^{-n}P(n)Q(n)|$ est équivalente au terme général d'une série congergente, donc par critère d'équivalence des SATP, $\sum |2^{-n}P(n)Q(n)|$ est une série convergente.
   Finalement, $\boxed{\sum 2^{-n}P(n)Q(n) \text{ converge absolument}}$ (donc converge.)
2. a) Pour avoir la bilinéarité, il faut s'assurer que l'on peut séparer les sommes dans
$$\sum_{n\geq 0} 2^{-n}(\lambda P_1(n) + \mu P_2(n))Q(n)$$
   Or cela n'est possible pour les séries que $\boxed{\text{si les séries impliquées sont convergentes,}}$ ce qui est bien le cas ici d'après la question 1b.
   b) $\langle P, P\rangle = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}P^2(n)$ est la somme d'une série à terme positif, donc elle est $\boxed{\text{positive}}$ à son tour.
   De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, considérons la suite des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}P^2(k)$.
   (S_n) est positive et croissante (puisque les termes sont positifs) et converge vers 0, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0$.
   Comme c'est une somme de termes positifs, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $2^{-k}P^2(k) = 0$, c'est à dire $P(k) = 0$.
   Comme cela est vrai pour tout n, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = 0$ et donc que P admet une infinité de racines.
   On en conclut que P est le polynôme nul, donc que $\langle , \rangle$ est $\boxed{\text{défini positif.}}$
   On obtient bien un produit scalaire.

c) $\langle 1,1\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (c'est une série géométrique).

Ainsi $\boxed{||1|| = \sqrt{2}.}$

3. Pour tout t, $f(t)$ est la somme d'une série géométrique, qui converge si et seulement si la raison est dans $]-1,1[$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,1[\text{ et } f(t) = \frac{1}{1-t}}$

4. $g(t)$ est définie si et seulement si $e^{-nt} \in]-1,1[$, c'est à dire si et seulement si $t > 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi } g \text{ est définie sur }]0,+\infty[.}$

5. comme $g(x) = f(e^{-x})$, on déduit immédiatement que $\boxed{g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}.}$

   Il reste à dériver et on obtient $\boxed{g'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$ et $\boxed{g''(x) = \frac{e^{-x}+e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3}}$

6. Commençons écrire que $\langle 1,X\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n\ln(2)}$

   On est en réalité pas loi de $g(\ln(2))$... ou plutôt de $g'(\ln(2))$!
   En effet, d'après la remarque admise, on a

   $$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -ne^{-nx}$$

   Donc $\langle 1,X\rangle = -g'(\ln(2))$!
   Il ne reste qu'à remplacer dans l'expression de $g'(x)$ de la question précédente pour obtenir

   $$\boxed{\langle 1,X\rangle = 2}$$

   De plus, $\langle X,X\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} n^2 2^{-n}$, et $g''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} n^2 e^{-nx}$

   Autrement dit, $\boxed{\langle X,X\rangle = g''(\ln(2)) = 6}$