INTÉGRATION

Épreuves orales

1 *CCINP MP (exercice 28)*

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

2 *Mines-Télécom*

Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.)

3 *Mines-Télécom*

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-2\ln t}} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ en posant $x = \sqrt{-\ln t}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Poser le changement de variable $x = (\cos t)^n$ dans l'intégrale $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n(t^{-2/n}-1)}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2\ln t}}$ sur $]0,1[$ et en déduire, grâce au théorème de convergence dominée, que $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4 *CCINP MP (exercice 26)*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?
4. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n et en déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5 *TPE/ CCINP MP (exercice 19)*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

$\boxed{6}$ *Mines-Ponts (Intégrale de Gauss)*

Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

$\boxed{7}$ *Centrale*

Éléments de correction : CCINP MP (exercice 30)

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et la calculer.
2. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(2p)!} I_p$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ de deux manières différentes.

$\boxed{8}$ *Mines-Télécom, CCINP MP (exercice 50)*

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite. En déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $F(x)$.

$\boxed{9}$ *CCINP*

1. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Soit $f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(x, t)\mathrm{d}t$.
   (a) Exprimer F en fonction de g.
   (b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x, x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t$.
3. Dans cette question, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^y f(x, t)\mathrm{d}t$ admet des dérivées partielles et les expliciter.

$\boxed{10}$ *Centrale*

On étudie l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f.

$\boxed{11}$ *Centrale*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^n e^{-t}t^n\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

12 *CCINP*

1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge pour $\alpha > 1$.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.
   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge (on pourra faire une intégration par parties).
   Dans la suite, on note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ sour forme d'une intégrale.
   (c) Calculer $\varphi'(0)$.
3. On admet que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \mathrm{d}t$ où $f : (x,t) \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$.
   (a) Calculer $\varphi''(x) - \varphi(x)$ en fonction de I pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Étudier la limite de φ' en $+\infty$ et en déduire la valeur de I.

13 *Centrale, CCINP*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.
4. Montrer que pour tout $x \in D \cap]0, +\infty[$ et $N \in \mathbb{N}$, on a :
$$\int_1^{N+1} \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2+n^2} \leqslant \int_0^{N} \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y$$
   En déduire la limite de f en $+\infty$.

14 *Centrale*

Soit f une fonction positive, continue et décroissante de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge et dans ce cas, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f$.

15 *ESPCI*

Pour $x \geqslant 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que $I(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^{-1/2})$.
2. Écrire $I(x)$ sous la forme d'une somme de série.

16 *ENS*

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f \in E$, $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E.

1. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f_n^2 \to \int_0^1 f^2$ et que, pour tout $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_0^1 f_n g \to \int_0^1 fg$.
   Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (f_n - f)^2 \to 0$.
2. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 |f_n| \to \int_0^1 |f|$ et que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f sur $[0,1]$.
   Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f| \to 0$.