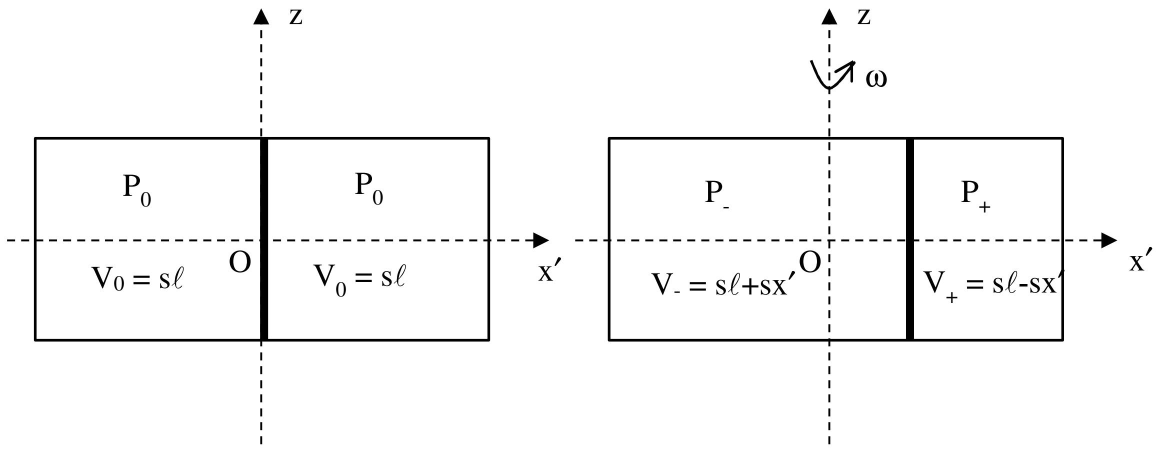
4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 4

Un cylindre d'axe horizontal, de longueur 2ℓ, de section s, maintenu à la température T par un thermostat, est séparé en deux par un piston de masse m mobile sans frottement. On place une mole d'hélium dans chaque compartiment et on fait tourner le cylindre à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe de symétrie vertical.

Etudier les positions d'équilibre du piston.



Référentiel R galiléen (Oxyz)
Référentiel R' non galiléen (Ox′y′z) en rotation autour de Oz par rapport à R
Système : le piston
Actions sur le système :
- poids
- réaction du cylindre
- forces de pression exercée par les gaz des deux cotés
- force d'inertie d'entraînement
- force d'inertie de Coriolis

<u>Loi de la quantité de mouvement dans R' à l'équilibre</u> en projection selon Ox′ : $0 = m\omega^2 x' + P_- s - P_+ s$

Loi des gaz parfaits : $P_- = \dfrac{RT}{s(\ell + x')}$ $\quad P_+ = \dfrac{RT}{s(\ell - x')}$

Donc : $0 = m\omega^2 x' + RT\left(\dfrac{1}{\ell + x'} - \dfrac{1}{\ell - x'}\right)$

$$0 = m\omega^2 x' - 2RT\frac{x'}{\ell^2 - x'^2}$$

On en déduit que les positions d'équilibre sont : $\boxed{x'_1 = 0 \quad ; \quad x'_2 = \sqrt{\ell^2 - \dfrac{2RT}{m\omega^2}} \quad ; \quad x'_3 = -x'_2}$

x'_3 et x'_2 n'existent que si : $\boxed{T < T_{critique} = \dfrac{m\ell^2\omega^2}{2R}}$

<u>Pour étudier la stabilité de l'équilibre $x'_1 = 0$</u>, on va étudier les petits mouvements autour de $x'_1 = 0$.
Loi de la quantité de mouvement dans R' en projection selon Ox′ : $m\ddot{x}' = m\omega^2 x' + P_- s - P_+ s$

$$m\ddot{x}' = m\omega^2 x' - 2RT\frac{x'}{\ell^2 - x'^2}$$

En supposant $x' \ll \ell$, il reste : $\ddot{x}' = \omega^2 x' - 2RT\dfrac{x'}{\ell^2}$ $\quad$ soit : $\ddot{x}' + \omega^2\left(\dfrac{T}{T_{critique}} - 1\right)x' = 0$

Equilibre stable si $T > T_{critique}$ car petites oscillations autour de $x'_1 = 0$. C'est la seule.
Equilibre instable si $T < T_{critique}$ car solutions exponentielles. x'_3 et x'_2 seront alors stables.
