2.6 Forces centrales-Exercice 11

1-Un vaisseau spatial de masse m est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 décrite à la vitesse V_0 autour d'un astre de masse M. On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre.
Évaluer la vitesse V_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre en fonction de G, M et r_0.

2-Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget de vitesse » ΔV égal à $4V_0$. Cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4V_0$.

a) *option 1* : le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5V_0$.
Evaluer sa vitesse finale « à l'infini » en fonction de V_0.

b) *option 2* : on utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de V_0 à $V_0/2$ en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction.
Décrire la nouvelle trajectoire : le demi-grand axe a, les distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre O au périgée, les normes des vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périgée en fonction de r_0.
On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale « à l'infini » en fonction de V_0.

c) Comparer les deux options, et commenter.

2.6 Forces centrales-Exercice 11

1-Pour la trajectoire circulaire initiale, la vitesse V_0 du satellite s'obtient par le théorème de la quantité de mouvement en projection selon la direction radiale :

$$-m\frac{V_0^2}{r_0} = -\frac{GmM}{r_0^2} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

Pour échapper à l'attraction gravitationnelle de l'astre, l'énergie mécanique du satellite doit s'annuler. La trajectoire devient alors parabolique.

$$E_m = \frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{GmM}{r_0} = 0 \qquad \text{D'où : } \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{2}V_0}$$

2-a) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre la position de départ et l'infini :

$$E_{mi} = \frac{1}{2}m(5V_0)^2 - \frac{GmM}{r_0} = \frac{25}{2}mV_0^2 - mV_0^2 = \frac{23}{2}mV_0^2$$

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mV_\infty^2 + 0$$

$$E_{mf} = E_{mi} \Rightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt{23}V_0}$$

2-b) La position initiale devient l'apogée de la nouvelle trajectoire elliptique : $\boxed{r_A = r_0 \quad V_A = \frac{V_0}{2}}$

La nouvelle énergie mécanique initiale est : $E_{mi} = \frac{1}{2}m(\frac{V_0}{2})^2 - \frac{GmM}{r_0} = \frac{1}{8}mV_0^2 - mV_0^2 = -\frac{7}{8}mV_0^2$

On a aussi : $E_{mi} = -\frac{GmM}{2a} =$ avec a le demi-grand axe

Or $GM = r_0V_0^2$ d'où : $-\frac{mr_0V_0^2}{2a} = -\frac{7}{8}mV_0^2$ puis : $\boxed{a = \frac{4}{7}r_0}$

On a ensuite : $r_P = 2a - r_A$ donc : $\boxed{r_P = \frac{r_0}{7}}$

Conservation du moment cinétique entre apogée et périgée : $r_AV_A = r_PV_P \Rightarrow \boxed{V_P = \frac{7V_0}{2}}$

Le reste du budget vitesse est : $4V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{7}{2}V_0$

La nouvelle vitesse initiale au périgée est : $Vi = V_P + \frac{7V_0}{2} = 7V_0$

La nouvelle énergie mécanique est : $E_{mi} = \frac{1}{2}m(7V_0)^2 - \frac{GmM}{(r_0/7)} = \frac{49}{2}mV_0^2 - 7mV_0^2 = \frac{35}{2}mV_0^2$

Elle est positive donc la trajectoire est hyperbolique.

On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre la position de départ et l'infini :

$$E_{mi} = \frac{35}{2}mV_0^2$$

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mV_\infty^2 + 0$$

$$E_{mf} = E_{mi} \Rightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt{35}V_0}$$

c-La deuxième option est préférable pour obtenir une plus grande vitesse à l'infini. Cela peut sembler paradoxal car elle débute par un freinage.
