2.4 Particules chargées-Exercice 1

1-Un proton arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}_0$ orthogonal à $\vec{v}_0$.

a-Montrer que l'on peut négliger le poids du proton.

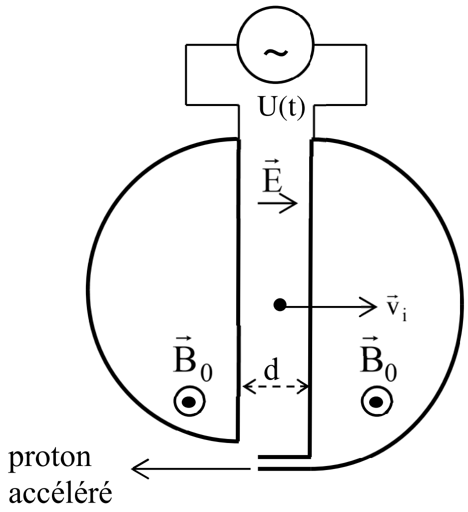
b-Montrer que l'énergie cinétique du proton reste constante.

c-Déterminer les caractéristiques de la trajectoire du proton.

2-Un cyclotron est formé de deux cavités vides en forme de demi-disque, séparées d'une petite distance d. Dans ces cavités existe un champ magnétique $\vec{B}_0$ uniforme et stationnaire.

Un champ électrique uniforme et variable $\vec{E}(t)$ est créé dans l'espace entre les cavités par application d'une différence de potentiel alternative $U(t) = U_0\sin(2\pi ft)$

Un proton est injecté avec une faible vitesse initiale $\vec{v}_i$ au centre du dispositif



Montrer que cet accélérateur fonctionne correctement à condition de donner à f une valeur particulière f_0 dont on évaluera l'ordre de grandeur.

3-Le premier cyclotron construit en 1932 avait un rayon de 14 cm et la tension U_0 valait 4000 V. On a B_0 = 1 T.

a-Déterminer la vitesse de sortie du proton. Les lois de la mécanique classique sont-elles valables ?

b-Exprimer en électron-volt l'énergie cinétique acquise par les protons

c-Combien de tours le proton a-t-il effectué dans le cyclotron ?

2.4 Particules chargées-Exercice 1

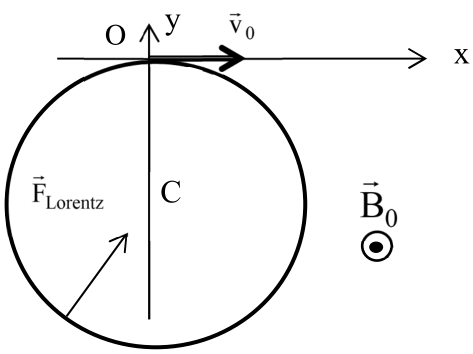
1-a) Poids du proton : $mg \approx 10^{-26}$ N ($m = 1{,}7.10^{-27}$ kg)

Force de Lorentz : $ev_0B_0 \approx 10^{-19}$ N en prenant $v_0 \approx 1$ m.s^{-1} et $B_0 \approx 1$ T

On a bien : $\boxed{ev_0B_0 >> mg}$

b-Théorème de la puissance cinétique au proton : $\dfrac{dE_c}{dt} = e(\vec{v} \wedge \vec{B}_0).\vec{v} = 0$ donc E_c = constante

c-Loi de la quantité de mouvement : $m\vec{a} = e(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$



Selon Ox : $m\ddot{x} = e\dot{y}B_0$

Selon Oy : $m\ddot{y} = -e\dot{x}B_0$

Selon Oz : $m\ddot{z} = 0$ => mouvement dans le plan z = 0

On intègre la deuxième relation : $\dot{y} = -\dfrac{eB_0}{m}x$

(Constante d'intégration nulle car $\dot{y} = 0$ et $x = 0$ à $t = 0$)

D'où : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec : $\omega_0 = \dfrac{eB_0}{m}$

Solution : $x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

A $t = 0$: $x = 0 = A$ et $\dot{x} = v_0 = B\omega_0$

D'où : $\boxed{x = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$ Puis : $\dot{y} = -v_0 \sin\omega_0 t$ donne : $\boxed{y = \dfrac{v_0}{\omega_0}(-1+\cos\omega_0 t)}$

On a : $x^2 + (y + \dfrac{v_0}{\omega_0})^2 = (\dfrac{v_0}{\omega_0})^2$. La trajectoire est le cercle de rayon : $\boxed{R = \dfrac{v_0}{\omega_0} = \dfrac{mv_0}{eB_0}}$, de centre C(0,-R).

Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire ω_0.

2-Le proton va décrire une succession de demi-cercles, de rayons croissants, dans le sens des aiguilles d'une montre. La vitesse angulaire est la même pour tous ces demi-cercles. Ils sont donc décrits pendant la durée $\dfrac{T_0}{2} = \dfrac{\pi}{\omega_0}$

Le champ électrique accélérateur doit changer de sens à l'issu de chaque demi-cercle afin d'exercer une force dans le sens du mouvement du proton. Sa demi-période est aussi $T_0/2$, donc sa fréquence est :

$\boxed{f = f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{eB_0}{2\pi m}}$ A.N : $f_0 \approx \dfrac{10^{-19}.1}{10^{-26}} \approx$ 10 MHz

3-a) $v_{sortie} = \dfrac{eB_0R}{m} \approx \dfrac{1{,}6.10^{-19}.1.0{,}14}{1{,}7.10^{-27}} \approx$ $1{,}3.10^7$ m.s^{-1}

$v_{sortie}/c \approx 0{,}04 << 1$. Le proton n'est pas relativiste, la mécanique classique est valable.

b) $E_c \approx 1{,}5.10^{-13}$ J $\approx$ 920 keV

c) Lors de chaque passage dans l'espace inter-cavités, le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer le gain d'énergie cinétique : $\Delta E_c = eU_0 = 4$ keV

Le nombre de demi-tours est donc : 920/4 = 230. Soit 115 tours.
