

---

**ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, FONCTIONS DE  
PLUSIEURS VARIABLES, ESPACES VECTORIELS NORMÉS**  
*Épreuves orales*

---

I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**1** CCINP

On considère l'équation différentielle  $(E) : xy'' + 2y' - xy = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Donner le rayon de convergence  $R$  de  $\sum a_n x^n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!}$  et  $a_{2n+1} = 0$ .  
Pour  $x \in ]-R, R[$ , exprimer  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  à l'aide de fonctions usuelles.
2. On donne une suite  $(b_n)$  telle que  $\sum b_n x^n$  a un rayon de convergence  $R' > 0$ .  
Montrer que  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  est une solution de  $(E)$  sur  $] - R', R'[$  vérifiant  $g(0) = 1$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = a_n$ .
3. Montrer qu'une fonction  $y$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $z'$ , où  $z : x \mapsto \frac{y(x)}{f(x)}$ , est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
4. Donner l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**2** CCINP

Soit  $(E)$  l'équation différentielle  $2(x - x^2)y''(x) + (x - 2)y'(x) - y(x) = 0$ .

1. Montrer que  $y_0 : x \mapsto x - 2$  est solution.
2. Soit  $I$  l'intervalle  $]1, 2[$  ou  $]2, +\infty[$ .  
Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement si  $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x - 2}$  est solution d'une certaine équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.
3. (a) On pose  $\varphi : x \mapsto -2\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ . Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et calculer  $\varphi'$ .  
(b) Résoudre  $(E)$  sur  $I$  sachant que  $\frac{4 - 3x^2}{2x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x-2}$ .  
(c) Résoudre  $(E)$  sur  $]1, +\infty[$ .

**3** Mines-Ponts

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation  $xy'' - (x + 3)y' + 3y = 0$  vérifiant  $y(0) = 1$ .

**4** Mines-Télécom et Mines-Ponts

Résoudre les systèmes différentiels  $(S_1) : \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$  et  $(S_2) : \begin{cases} x' = 2x - z + te^t \\ y' = 2y - 4z + e^t \\ z' = x - y + t^2 e^t \end{cases}$

**5** Centrale

Soit  $f$  une fonction continue et intégrable de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ .

On considère l'équation différentielle  $(E) y'' + f(x)y = 0$  et on note  $\mathcal{S}$  son ensemble solution.

1. Montrer que si  $y$  est une solution bornée de  $(E)$  alors  $yf$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et en déduire la limite de  $y'$  en  $+\infty$ .
2. On admet que l'application  $y \mapsto \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

Montrer que si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions de  $(E)$  alors  $W : x \mapsto \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$  est constante et en déduire que l'équation différentielle admet des solutions non bornées.

**6** ESPCI

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f_1, \dots, f_n$  des éléments de  $\mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$ .

On note

$$W_n(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

1. On suppose qu'il existe des réels non tous nuls  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que, pour tout  $t \in I$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) = 0$ .  
Que vaut  $W_n(f_1, \dots, f_n)$  ?
2. On suppose que  $W_n(f_1, \dots, f_n)$  est la fonction nulle et que  $W_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Montrer qu'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que  $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$ .

*Indication :* On admettra que si  $a_0, \dots, a_{n-2}$  sont des fonctions continues sur  $I$  alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$  est un espace vectoriel de dimension  $n - 1$ .

## II. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

**7** CCINP

1. Déterminer les extremums sur  $\mathbb{R}^2$  de  $f$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ .
2. Déterminer les extremums sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  de  $g$  définie par  $g(x, y) = x \ln y - y \ln x$ .

**8** CCINP

Soit  $n$  un entier strictement positif,  $E = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique,  $u$  un vecteur fixé de  $E$ ,  $A$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base canonique.

On étudie la fonction  $f$  de  $E$  qui à tout vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  associe  $f(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle - 2\langle x, u \rangle$ .

1. Ici,  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $u = (5, 1)$ .
  - (a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$ .  
Montrer que  $x_0 = (2, 1)$  est un point critique de  $f$ .
  - (b) Montrer que  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .
2. On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout  $x$  non nul de  $E$ ,  $\langle x, \varphi(x) \rangle > 0$ .
  - (a) Montrer que les valeurs propres de  $\varphi$  sont strictement positives.

- (b) En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de  $\varphi$ , montrer que  $f$  possède un extremum que l'on précisera.

**9** CCINP

On pose  $f(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}{2}$ .

1. Montrer que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\sin t \leq t$  et  $\operatorname{sh} t \geq t$ .
2. Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$ .  
En déduire le signe de  $f$ .
3. Montrer que 0 est le minimum de  $f$  sur  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
4. Montrer que  $D$  est fermé, borné et que  $f$  admet un maximum sur  $D$ .
5. Montrer que  $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$  est un ouvert et déterminer les points critiques de  $f$  sur  $D'$ .
6. En déduire qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $(x, y) \in D$ ,  $f(x, y) \leq f(\cos t_0, \sin t_0)$ .
7. Montrer que  $g : t \mapsto f(\cos t, \sin t)$  est décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et en déduire le maximum de  $f$  sur  $D$ .

**10** Mines-Ponts

On étudie  $f : (x, y) \mapsto x^2 y(x + y - 4)$  sur  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ .

1. Tracer  $\Delta$ .
2. Trouver tous les extrema locaux et globaux de  $f$  sur  $\Delta$ .

**11** CCINP

On pose pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3. La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

**12** Mines Télécom

1. Résoudre l'équation différentielle  $(1 + t^2)y' + 2ty = 0$ .
2. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par  $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$  avec  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .
  - (b) Déterminer les fonctions  $f$  de la forme ci-dessus telles que  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

**13** Centrale

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est  $\alpha$ -positivement homogène s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda > 0, f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z).$$

Montrer que  $f$  est  $\alpha$ -positivement homogène si et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z).$$

### III. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

#### 14 Centrale

Pour tout polynôme réel  $P$  et pour tout entier  $n$ , on pose  $a_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n dt$ .

Pour tout polynôme réel  $P$ , on pose :

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|, \quad N_\infty(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n(P)|, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2}.$$

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $N_\infty$  et  $N_2$  sont des normes sur  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Trouver des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positives telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P) \quad \text{et} \quad N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty.$$

4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.

#### 15 CCINP

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute matrice  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , on pose  $\|M\|_\infty = \max\{|m_{i,j}|, 1 \leq i,j \leq d\}$ .

1. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. On pose  $N = A - I_3$ . Calculer  $N^2$  puis les autres puissances de  $N$ .
3. Déterminer la limite de  $\|A^n\|_\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4. Vérifier que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .
5. Pour tout couple  $(M, N)$  de matrices de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leq d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

6. On suppose que  $M$  est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.  
Déterminer la limite de  $\|M^n\|_\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### 16 ENS

Soit  $E$  l'espace des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $f(0) = 0$ .

Pour tout  $f \in E$ , on pose  $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$ .

1. Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .
2. Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $f \in E$ ,  $\|f\|_\infty \leq a\|f\|$ .
3. Les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles équivalentes sur  $E$  ?