

Programme de Colle numero 29

Séries - déterminant - espace préhilbertien réel

Semaine du 16 juin 2025 : AN12 : Séries numériques / AL14 : Déterminant / AL15 : espace préhilbertien réels

? AUTO-TEST

Vous devez pouvoir répondre le plus précisément possible aux questions ci dessous.

► **AL14 : déterminant**

- Qu'est ce que le déterminant d'une famille de vecteur ?
- Donner les formules et les moyens mémo-technique pour le calcul en dim 2 ou 3.
- Qu'est ce que le déterminant d'un endomorphisme ? Pourquoi ne dépend-il pas de la base ?
- Qu'est ce que le déterminant d'une matrice ?
- Qu'est ce que le développement selon une ligne ou une colonne ?

► **AN13 : Séries numériques**

- Qu'est ce qu'une série ?
- Qu'appelle-t-on somme partielle ? Qu'est-ce qu'une série convergente ?
- Pourquoi l'étude des séries à termes positives est-elle facilitée ? Quels critères de convergence pour ces séries ?
- Présentez la comparaison série/intégrale.

- Convergence et sommes éventuelles des séries usuelles $\sum q^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- Qu'est-ce que la convergence absolue ?

► **AL15 : espace préhilbertien réel**

- Qu'est-ce qu'un produit scalaire ? Donner les produits scalaires usuels dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathcal{C}([a, b])$ et dans $\mathbb{R}_n[X]$.
- qu'est ce que la norme associée à un produit scalaire ? la distance associée ?
- Qu'est-ce que l'orthogonalité ? L'orthogonal d'un espace ?
- que dire d'une famille orthogonale ?
- Qu'est ce que l'algorithme de Gram-Schmidt ? Quelles conséquences sur les bases en dimension finie ?
- Qu'est-ce que l'orthogonal d'un ensemble ? Quelle différence avec le supplémentaire orthogonal en dimension finie ?
- Qu'est-ce que la projection orthogonale ? Quelle formule pour la calculer simplement ?
- Qu'est-ce que la distance à un sous ensemble ? Quel lien avec la projection orthogonale ?

Cette liste de question n'est pas exhaustive, mais savoir y répondre précisément et rapidement est un bon indice de connaissance de votre cours.



COMPÉTENCES OU SAVOIRS-FAIRE

1. Déterminer la nature d'une série en utilisant et en justifiant soigneusement l'utilisation des différents critères.
2. Calculer des sommes de série à partir des séries usuelles.
3. Utiliser une comparaison série / intégrale (tout faire, pas seulement l'encadrement final)
4. Montrez qu'une application donnée est un produit scalaire.
5. Savoir orthonormaliser une base via gram schmidt.
6. Calculer une projection orthogonale, une distance....



DEMONSTRATIONS EXIGIBLES

Les démonstrations ci dessous peuvent être demandées :

- Montrez qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
- Énoncez et démontrez le critère d'équivalence pour la convergence des SATP.
- Montrez que si une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls, alors cette famille est libre.
- Montrez que F et $F^\perp$ sont supplémentaires en dimension finie.