DL n° 5.

Séries entières et intégration

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\arctan(xt)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez sa parité.
2. Donnez $f(0)$ et $f(1)$.
3. Montrez que f est strictement croissante.
4. Montrez que l'arctangente est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est uniformément continue.
5. Dans cette question, on cherche la limite de f en $+\infty$.
   (a) Soient $x, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\varepsilon < 1$.
      i. Montrez que $\left| \int_0^\varepsilon \frac{1}{t^2+1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon$.
      ii. Montrez que $\left| \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^2+1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|\ln(\varepsilon)|}{x}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
6. Montrez que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan(b) - \arctan(a) - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}$.
7. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}\mathrm{d}t$.
8. Calculez $f'(x)$.
9. Montrez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Développement en série entière de f

1. Montrez que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{u^{2n+2}}{u^2+1}\mathrm{d}u$.
2. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge, et déterminez sa somme.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n(x) = \int_0^x \frac{u^{2n+2}}{u^2+1}\mathrm{d}u$, et $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

   Montrez que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} I_k x^{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{F_n(xt)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

4. Montrez que : $\forall\, x \in\ [-1,1]$, $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} I_k x^{2k+1}$ converge et déterminez sa somme.

5. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(2) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

   (a) Montrez que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(-1)^n u_n}{2}$.

   (b) Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{2n+1}$ converge et déterminez sa somme.

6. Montrez que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et déterminez sa somme.