MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2024/2025.

# Corrigé du DL n° 4.

## Problème

### Partie 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$, donc la suite est croissante, ce qui répond à la question.
2. Si la suite $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ également, et donc $\ell = \ell^2 + \ell$, donc $\ell = 0$. La suite est donc croissante, convergente vers 0, et $u_0 \geqslant 0$ : la suite ne peut être que constante égale à 0.

### Partie 2

1. On a $u_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc tous les termes sont $> 0$. La limite est une conséquence de la question 2 de la partie 1.
2. (a) On a

$$\begin{aligned} v_{p+k+1} - v_{p+k} &= \frac{\ln(u_{p+k+1})}{2^{p+k+1}} - \frac{\ln(u_{p+k})}{2^{p+k}} = \frac{1}{2^{p+k+1}}\big(\ln(u_{p+k+1}) - 2\ln(u_{p+k})\big) \\ &= \frac{1}{2^{p+k+1}} \ln\left(\frac{u_{p+k+1}}{u_{p+k}^2}\right) = \frac{1}{2^{p+k+1}} \ln\left(\frac{u_{p+k}^2 + u_{p+k}}{u_{p+k}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{p+k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{p+k}}\right). \end{aligned}$$

   (b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $u_p \leqslant u_{p+k}$ car $k \geqslant 0$. D'après la question 1, on a donc

$$0 < 1/u_{p+k} \leqslant 1/u_p,$$

   et donc par croissance du logarithme, on a l'inégalité demandée.
3. En sommant ces inégalités pour $k$ variant de 0 à $n$, (le membre central est une somme telescopique), on obtient

$$0 \leqslant v_{p+n+1} - v_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{p+k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_p}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{u_p}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{p+k+1}}.$$

   Or,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{p+k+1}} = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

   Mais $1/u_p > 0$, donc $\ln(1 + 1/u_p) > 0$, et on obtient l'inégalité demandée.
4. (a) Avec $p = 0$, on obtient que

$$v_{n+1} \leqslant v_0 + \ln(1 + 1/u_0) = \ln(u_0) + \ln(1 + 1/u_0)$$

   pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(b) Avec $n = 0$, on a
$$0 \leqslant v_{p+1} - v_p$$
pour tout entier $p$, prouvant que $(v_n)$ est croissante.

(c) Le (a) prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, et le (b) qu'elle est croissante. Elle est donc convergente.

5. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > 1$.

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $\alpha \geqslant v_n$ pour tout entier $n$. En particulier,
$$\alpha \geqslant v_N.$$
Or, $v_N > 0$, donc $\alpha > 0$.

6. (a) On fait tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question **??**. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on obtient l'inégalité demandée.

(b) On multiplie l'inégalité précédente par $2^p$, puis on prend les images par l'exponentielle qui est croissante, pour obtenir l'inégalité
$$1 \leqslant \frac{e^{2^p\alpha}}{u_p} \leqslant 1 + 1/u_p.$$
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et le théorème d'encadrement permet de dire que
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{e^{2^p\alpha}}{u_p} = 1.$$

## Partie 3

1. L'inégalité
$$1 \leqslant \frac{e^{2^n\alpha}}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$
pour $n \in \mathbb{N}$ (question 6(b) de la partie 2) donne (puisque $u_n > 0$)
$$u_n \leqslant e^{2^n\alpha} \leqslant u_n + 1,$$
ce qui prouve que $0 \leqslant w_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a
$$\begin{aligned}
-w_n^2 + w_n + (2w_n - 1)e^{2^n\alpha} &= -(e^{2^n\alpha} - u_n)^2 + e^{2^n\alpha} - u_n + (2(e^{2^n\alpha} - u_n) - 1)e^{2^n\alpha} \\
&= -u_n^2 + 2u_n e^{2^n\alpha} - e^{2^{n+1}\alpha} + e^{2^n\alpha} - u_n + 2e^{2^{n+1}\alpha} - 2u_n e^{2^n\alpha} - e^{2^n\alpha} \\
&= -u_n^2 + e^{2^{n+1}\alpha} - u_n \\
&= u_n - u_{n+1} + e^{2^{n+1}\alpha} - u_n \\
&= w_{n+1}.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left| w_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{\left| w_{n+1} + w_n^2 - w_n \right|}{2e^{2^n\alpha}} \leqslant \frac{3}{2e^{2^n\alpha}}.$$
Comme $\alpha > 0$, le second membre de l'inégalité converge vers 0, ce qui donne le résultat.

## Partie 4

La suite $u'$ vérifie la relation de récurrence $u'_{n+1} = u_n^2 + u_n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $u'_0 = u_1 > 0$. On applique alors la question 3 à cette suite. Notons $v'_n = \ln(u'_n)/2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha'$ sa limite. Alors $u'_n \sim e^{2^n\alpha'}$. Or,

$$v'_n = \frac{\ln(u'_n)}{2^n} = 2\frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}},$$

donc $\alpha' = 2\alpha$. On en déduit que

$$u_n = u'_{n-1} \sim e^{2^{n-1}\alpha'} = e^{2^n\alpha}.$$

## Partie 5

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $-1 < u_n < 0$. En effet, c'est l'hypothèse de l'énoncé dans le cas $n = 0$. De plus, si $-1 < u_n < 0$ pour un certain entier $n$, alors $u_{n+1} = P(u_n)$ où $P(X) = X^2 + X$. Ce polynôme a pour racines $-1$ et $0$, et atteint son minimum $-\frac{1}{4}$ en $X = -\frac{1}{2}$. Donc, si $-1 < X < 0$, alors $-\frac{1}{4} \leqslant P(X) < 0$, ce qui prouve que $-1 < u_{n+1} < 0$.

   La suite $u$ est donc bornée, donc convergente d'après la question 1(a), et sa limite est nulle d'après la question 1(b).
2. Un calcul direct montre que
$$w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{u_n + 1}$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$. De (a) on déduit la réponse à la question.
3. Soit $v$ la suite définie par $v_n = w_n - w_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette suite converge vers $-1$, donc la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$\frac{v_1 + \cdots + v_n}{n} = \frac{w_n}{n} - \frac{w_0}{n}$$
   converge également vers $-1$ (convergence au sens de Cesaro). Or, $w_0/n$ converge vers 0, d'où le résultat.
4. Découle immédiatement de (c).