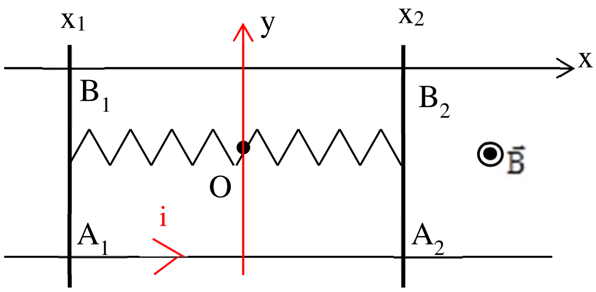
1.7 Induction-Circuit mobile-Exercice 7

Les deux barres de longueur L et de résistances R/2 sont attachées à des ressorts de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 fixés en O. Le champ magnétique vertical est uniforme et stationnaire.

Etudier $x_1(t)$ et $x_2(t)$.



Etude qualitative :

- Les barres conductrices sont mobiles dans une région où règne un champ magnétique stationnaire
  => force électromotrice induite
  => courant induit i

- Forces de Laplace exercée par le champ magnétique sur les barres
  => modification du mouvement des barres

Etude électrique :

Loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ avec : $\Phi = \iint_{circuit} \vec{B}.d\vec{S} = \iint_{circuit} B\vec{u}_z dxdy\vec{u}_z = BL(x_2 - x_1)$

Donc : $e = -BL(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

Loi des mailles : e = Ri donc : $\boxed{-BL(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = Ri}$

Etude mécanique :

Force de Laplace sur la tige 1 : $\vec{F}_{L1} = \int_{B_1}^{A_1} id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{L/2}^{-L/2} Idy\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = -iBL\vec{u}_x$

Force de Laplace sur la tige 2 : $\vec{F}_{L2} = \int_{A_2}^{B_2} id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{-L/2}^{L/2} Idy\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = iBL\vec{u}_x$

Théorème de la quantité de mouvement pour la tige 1 en projection selon Ox, dans *R* galiléen :

$$m\ddot{x}_1 = -iBL + k(-x_1 - \ell_0) = \frac{B^2L^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(-x_1 - \ell_0) \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{x}_1 + \frac{B^2L^2}{mR}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = \frac{B^2L^2}{mR}\dot{x}_2 - \frac{k}{m}\ell_0}$$

Théorème de la quantité de mouvement pour la tige 2 en projection selon Ox, dans *R* galiléen :

$$m\ddot{x}_2 = iBL - k(x_2 - \ell_0) = -\frac{B^2L^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - \ell_0) \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{B^2L^2}{mR}\dot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 = \frac{B^2L^2}{mR}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}\ell_0}$$

Par addition : $(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \dfrac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0$ => $x_1 + x_2$ sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Par soustraction : $(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 2\dfrac{B^2L^2}{mR}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) = -\dfrac{2k}{m}\ell_0$

Equation d'un oscillateur amorti pour $x_1 - x_2$ => $x_1 - x_2$ tend vers $-2\ell_0$ constant
=> les deux barres ont le même mouvement sinusoïdal final
=> le courant induit tend vers 0 comme prévu par la loi de Lenz