

1.1 Optique géométrique-Exercice 16

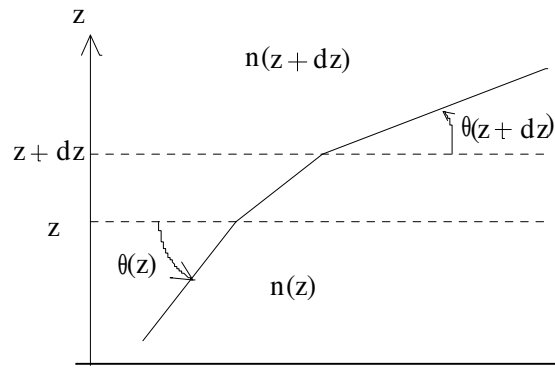
On considère un rayon lumineux se propageant dans un milieu transparent d'indice variable $n(z)$.

a-Montrer que $n(z)\cos\theta(z) = K$ avec K appelé invariant de déviation.

b-Montrer que : $1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(z)}{K^2}$. En déduire que : $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2K^2} \frac{dn^2}{dz}$

c-On pose : $\frac{dn^2}{dz} = \beta = \text{constante}$.

- Quelle est la trajectoire du rayon ?
- Expliquer pourquoi en été, lors de fortes chaleurs, on peut apercevoir des morceaux de ciel sur la route.
- Soit un observateur situé à une hauteur H , déterminer la distance D à partir de laquelle il peut observer ce phénomène.



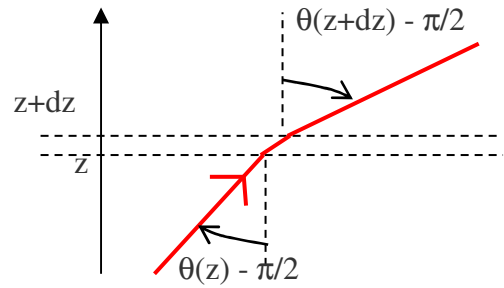
1.1 Optique géométrique-Exercice 16

a-La fine tranche entre z et $z+dz$ joue le rôle de dioptre entre des milieux d'indices $n(z)$ et $n(z+dz)$.

$$\text{Donc : } n(z) \sin\left(\theta(z) - \frac{\pi}{2}\right) = n(z+dz) \sin\left(\theta(z+dz) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Soit : } n(z) \cos\theta(z) = n(z+dz) \cos\theta(z+dz)$$

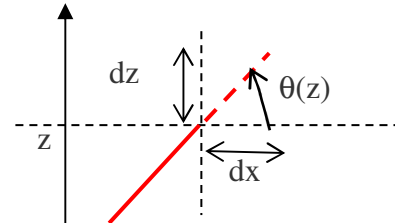
$$\text{On en déduit : } \boxed{n(z) \cos\theta(z) = \text{constante} = K}$$



b-On a : $\tan \theta(z) = \frac{dz}{dx}$ et $\cos \theta(z) = \frac{K}{n(z)}$

$$\text{La formule trigonométrique : } 1 + \tan^2 \theta(z) = \frac{1}{\cos^2 \theta(z)}$$

$$\text{donne : } \boxed{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(z)}{K^2}}$$

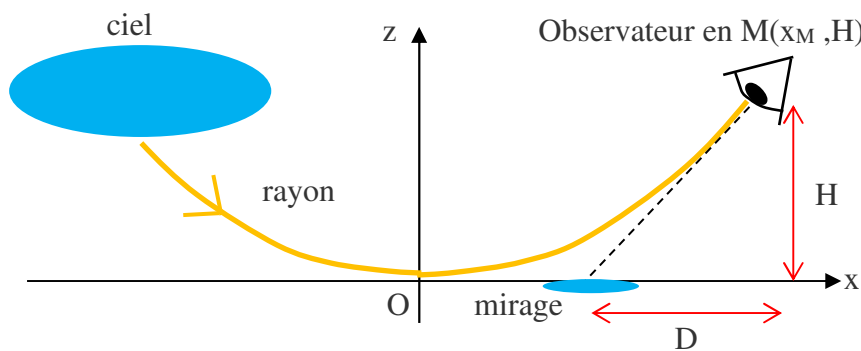


$$\text{On dérive par rapport à } x : 2 \frac{dz}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{K^2} \frac{d(n^2(z))}{dx} = \frac{1}{K^2} \frac{d(n^2(z))}{dz} \frac{dz}{dx}$$

$$\text{En simplifiant par } \frac{dz}{dx}, \text{ il reste : } \boxed{\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2K^2} \frac{dn^2}{dz}}$$

c-• On a maintenant : $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\beta}{2K^2} \Rightarrow z = \frac{\beta}{4K^2} x^2 + Ax + B$ Trajectoire parabolique

- L'air au contact de la route est chaud, donc peu dense, donc d'indice $n(z)$ plus faible
L'air un peu plus haut est plus froid, donc plus dense, donc d'indice $n(z)$ plus élevé.
On a un indice variable en fonction de z .
D'après l'étude précédente on aura un rayon courbe ce qui donne ce phénomène de mirage.



$$\text{Avec ce schéma, l'équation de la parabole est : } z = \frac{\beta}{4K^2} x^2 \Rightarrow \left(\frac{dz}{dx}\right)_M = \frac{\beta}{2K^2} x_M$$

$$\text{La droite allant de l'observateur au mirage a pour équation : } z = \frac{\beta x_M}{2K^2} (x - x_M) + H$$

$$\text{L'abscisse du mirage s'obtient pour } z = 0 : 0 = \frac{\beta x_M}{2K^2} (x - x_M) + H \Rightarrow x_{\text{mirage}} = x_M - \frac{2K^2 H}{\beta x_M}$$

$$\text{Donc : } \boxed{D = x_M - x_{\text{mirage}} = \frac{2K^2 H}{\beta x_M}}$$