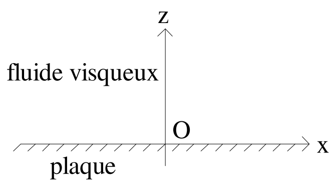
4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 5

Une plaque est animée d'un mouvement sinusoïdal de vitesse $\vec{v}_P = v_0 \cos \omega t \vec{u}_x$.

Elle est surmontée d'un fluide visqueux, de viscosité η, incompressible de masse volumique μ. En négligeant les effets de bord, le champ des vitesses dans le fluide peut s'écrire : $\vec{v}(M,t) = v_x(z,t)\vec{u}_x$



a-Montrer que $v_x(z,t)$ est solution de $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$ où $\nu = \eta/\mu$ est la viscosité cinématique..

b-On cherche en régime sinusoïdal forcé un champ des vitesses du type $\underline{v}_x(z,t) = f(z)e^{j\omega t}$. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2\nu}{\omega}}$.

Déterminer la fonction f(z) puis l'expression du champ des vitesses en notation réelle.
En déduire que l'oscillation de la plaque se propage dans le fluide tout en étant atténuée.

c-Le noyau externe liquide de la Terre est 100 fois plus visqueux que l'eau et a une densité de 10. Montrer que les ondes sismiques de cisaillement, de fréquence de l'ordre de quelques Hz, ne peuvent pas s'y propager.

d-Calculer la puissance surfacique moyenne que doit fournir un opérateur pour entretenir le mouvement de la plaque.

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 5

---

a-Equation de Navier Stokes : $\mu\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\mathrm{grad})\vec{v}\right]=\mu\vec{g}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P+\eta\Delta\vec{v}$

On a : $(\vec{v}.\mathrm{grad})\vec{v}=(v_x\frac{\partial}{\partial x})\vec{v}(z,t)=\vec{0}$; $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P=-\frac{dP}{dz}\vec{u}_z$; $\Delta\vec{v}=\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\vec{e}_x$

D'où en projection selon Ox : $\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}$

b-On reporte $\underline{v}_x(z,t)=f(z)e^{j\omega t}$ dans l'équation ci-dessus, on obtient : $\frac{d^2f}{dz^2}(z)-\frac{j\omega}{\nu}f(z)=0$

<u>Equation caractéristique</u> : $r^2=\frac{j\omega}{\nu}$ d'où $r=\pm\frac{1+j}{\delta}$ avec $\delta=\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ = longueur caractéristique

<u>Solution</u> : $f(z)=Ae^{-\frac{1+j}{\delta}z}+Be^{\frac{1+j}{\delta}z}$

<u>Conditions aux limites</u> : vitesse finie quand z tend vers l'infini donc : B = 0

Condition d'adhérence : $\underline{v}_x(z=0,t)=v_0e^{j\omega t}$ => $f(0)=v_0$ donc : $A=v_0$

Donc : $f(z)=v_0e^{-\frac{1+j}{\delta}z}$ et $\underline{v}_x(z,t)=v_0e^{-\frac{1+j}{\delta}z}e^{j\omega t}=v_0e^{-\frac{z}{\delta}}e^{j(\omega t-\frac{z}{\delta})}$

En notation réelle : $\boxed{v_x(z,t)=v_0e^{-\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t-\frac{z}{\delta})}$

$\cos(\omega t-\frac{z}{\delta})$ traduit la <u>propagation</u> du mouvement de la plaque dans le fluide

$e^{-\frac{z}{\delta}}$ traduit <u>l'atténuation</u> lors de la propagation sur la distance caractéristique δ

c-Avec $\mu = 10^4$ kg.m^{-3} et $\eta = 0{,}1$ Pl on calcule : $\nu = 10^{-5}$ m^2.s^{-1}
Avec $\omega\approx 2\pi$ rad.s^{-1} on trouve : $\delta\approx$ 2 mm
L'atténuation est très rapide. La propagation n'aura pas lieu.

d-On calcule : $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0}=-\frac{v_0}{\delta}\cos\omega t+\frac{v_0}{\delta}\sin\omega t$ d'où : $\vec{F}_{\text{fluide}\to\text{plaque}}=\eta S\left[-\frac{v_0}{\delta}\cos\omega t+\frac{v_0}{\delta}\sin\omega t\right]\vec{u}_x$

La puissance moyenne fournie par le fluide est : $P=<\vec{F}_{\text{fluide}\to S=1m^2}.\vec{v}_P>$ soit : $\boxed{P=-\frac{\eta v_0^2}{2\delta}}$

L'opérateur doit fournir la puissance opposée.
