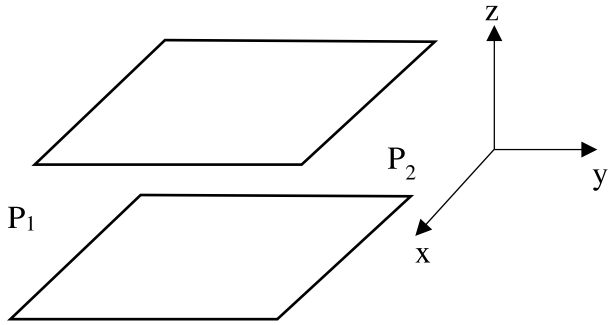
4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 4

Un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ s'écoule entre deux plaques infinies selon Ox et placées en z = a/2et z = -a/2. On néglige la pesanteur.
Le fluide est soumis à une différence de pression P_1 - P_2 variant sinusoïdalement.
On pose : $\overrightarrow{\text{grad}}P = -F(t)\vec{e}_y$ où F(t) est une fonction sinusoïdale de fréquence f.



a- $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$. Simplifier ce champ de vitesse.

b-Que vaut le champ de vitesse pour une fréquence f très grande ?

c-On donne l'équation de Navier-Stokes : $\mu\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\text{grad})\vec{v}\right] = \mu\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\vec{v}$

En supposant F(t) = F_0 constante, montrer que v vérifie $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{F_0}{\rho} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ et définir ν.

d-En régime stationnaire, montrer que le profil des vitesses est parabolique. Définir une vitesse moyenne.

e-On se place en régime sinusoïdal forcé en posant F(t) = Re($F_0e^{i\omega t}$). Justifier que l'on cherche une solution sous la forme $\underline{v}(z,t) = \underline{v}(z)e^{i\omega t}$. Résoudre l'équation vérifiée par $\underline{v}(z)$

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 4

---

a-• Invariance par translation selon Ox => u, v, w ne dépendent pas de x

• Ecoulement selon Oy à cause du gradient de pression => u = 0 et w = 0

• Ecoulement incompressible $\mathrm{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ => v ne dépend pas de y

Donc : $\boxed{\vec{v} = v(z)\vec{e}_y}$

b- $\vec{v} = \vec{0}$ car <u>le fluide n'a pas le temps de suivre les variations de pression</u>.

c-On a : $(\vec{v}.\mathrm{grad})\vec{v} = (v\dfrac{\partial}{\partial y})\vec{v}(z) = \vec{0}$; $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P = -F_0\vec{e}_y$; $\Delta\vec{v} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{e}_y$

Equation de Navier-Stokes en projection selon Oy : $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{F_0}{\rho} + \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$ avec $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ (<u>viscosité cinématique</u>)

d-En régime stationnaire : $\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\dfrac{F_0}{\eta}$ de solution : $v = -\dfrac{F_0}{2\eta}z^2 + Az + B$

Conditions aux limites : $\begin{cases} 0 = -\dfrac{F_0}{2\eta}\dfrac{a^2}{4} + A\dfrac{a}{2} + B \\ 0 = -\dfrac{F_0}{2\eta}\dfrac{a^2}{4} - A\dfrac{a}{2} + B \end{cases}$ donc A = 0 et $B = \dfrac{F_0}{2\eta}\dfrac{a^2}{4}$

D'où : $\boxed{v = \dfrac{F_0}{2\eta}(\dfrac{a^2}{4} - z^2)}$

Vitesse moyenne telle que : $q_v = v_{moy}aL$ (l : largeur selon Ox)

On calcule : $q_v = L\int_{-a/2}^{a/2} v(z)dz = L\dfrac{F_0}{2\eta}\int_{-a/2}^{a/2}(\dfrac{a^2}{4} - z^2)dz = L\dfrac{F_0}{2\eta}(\dfrac{a^3}{4} - \dfrac{a^3}{12}) = L\dfrac{F_0}{12\eta}a^3$

Donc : $\boxed{v_{moy} = \dfrac{F_0 a^2}{12\eta}}$

e-L'équation est linéaire donc en régime forcé, la solution v(z,t) sera du même type que l'excitation c'est-à-dire sinusoïdale de pulsation ω.

Equation de Navier-Stokes : $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{F(t)}{\rho} + \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ => $\boxed{\dfrac{d^2\underline{v}(z)}{dz^2} - \dfrac{i\omega}{\nu}\underline{v}(z) = -\dfrac{F_0}{\eta}}$ en notation complexe

Equation caractéristique : $r^2 = \dfrac{i\omega}{\nu}$ d'où $r = \dfrac{1+i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2\nu}{\omega}}$ = longueur caractéristique

Solution : $\boxed{\underline{v}(z) = Ae^{-\frac{1+i}{\delta}z} + Be^{\frac{1+i}{\delta}z} + \dfrac{F_0}{i\rho\omega}}$

Conditions aux limites : $\begin{cases} 0 = Ae^{-\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}} + Be^{\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}} + \dfrac{F_0}{i\rho\omega} \\ 0 = Ae^{\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}} + Be^{-\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}} + \dfrac{F_0}{i\rho\omega} \end{cases}$ donc $A = B = \dfrac{-\dfrac{F_0}{i\rho\omega}}{e^{-\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}} + e^{\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}}}$
