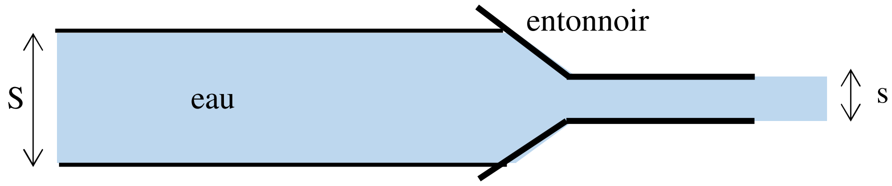
4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 9



Un opérateur applique un entonnoir à l'extrémité d'un tube de section S dans lequel s'écoule un courant d'eau (vitesse V_1, pression P, masse volumique μ). La pression ambiante est P_0.

Déterminer la force nécessaire à l'opérateur pour maintenir l'entonnoir en place.
On fera les suppositions nécessaires.

4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 9

On cherche la force que doit exercer l'opérateur qui tient l'entonnoir pour le maintenir immobile.

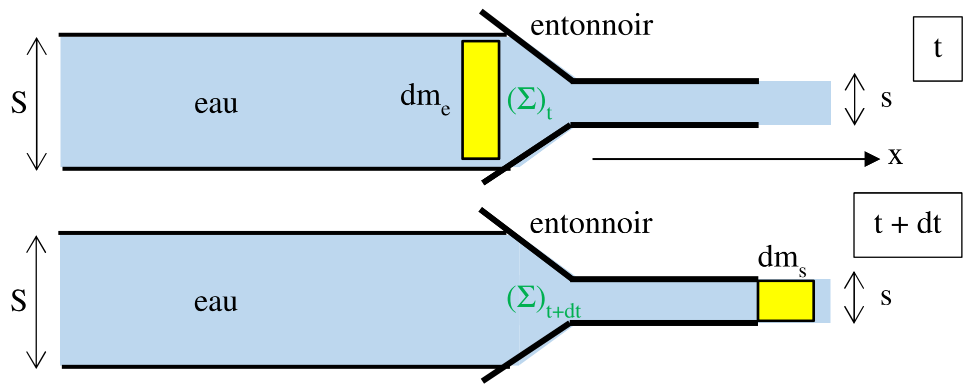
<u>Equilibre de l'entonnoir</u> (en négligeant son poids) : $\vec{F}_{eau \to entonnoir} + \vec{F}_{air \to entonnoir} + \vec{F}_{opérateur \to entonnoir} = \vec{0}$

$$\vec{F}_{opérateur \to entonnoir} = -\vec{F}_{eau \to entonnoir} - \vec{F}_{air \to entonnoir} \qquad \text{avec : } \vec{F}_{air \to entonnoir} = \iint_{\substack{\text{surface latérale} \\ \text{de l'entonnoir}}} P_0 d\vec{S}(M)$$

Pour calculer $\vec{F}_{eau \to entonnoir}$, on cherche la force opposée $\vec{F}_{entonnoir \to eau} = -\vec{F}_{eau \to entonnoir}$

Système ouvert (Σ) : l'eau entre les sections S (fin du tube) et s (fin de l'entonnoir)

Système fermé (Σ*) = $(\Sigma)_t + dm_e = (\Sigma)_{t+dt} + dm_s$ avec $dm_e = dm_s = q_m dt = \mu S V_1 dt$ en régime stationnaire



<u>Loi de la quantité de mouvement</u> pour le système fermé (Σ*) dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \vec{F}_{ext \to (\Sigma^*)} = m_{(\Sigma^*)}\vec{g} + \vec{F}_{entonnoir \to eau} + \vec{F}_{pression\, amont \to dm_e} + \vec{F}_{pression\, aval \to dm_s}$$

Le poids de l'eau constituant (Σ*) (quelques litres) sera supposé négligeable devant les autres forces.

On a : $\dfrac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \dfrac{\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(\Sigma)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt}$ Or : $\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) = \vec{P}_{(\Sigma)}(t)$ en régime stationnaire

Il reste : $\dfrac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \dfrac{\vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{dm_e}}{dt} = \dfrac{dm_s \vec{V}_2 - dm_e \vec{V}_1}{dt} = q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ avec V_2 vitesse de dm_s en sortie

On a :
- $\vec{F}_{pression\, amont \to dm_e} = PS\vec{u}_x$ et $\vec{F}_{pression\, aval \to dm_s} = -P_0 s \vec{u}_x$
- $V_1 S = V_2 s$ (conservation du débit)
- Ecoulement parfait, stationnaire, incompressible d'un fluide homogène.
  <u>Relation de Bernoulli</u> sur la ligne de courant allant de dm_e à dm_s :
  $P + \frac{1}{2}\mu V_1^2 = P_0 + \frac{1}{2}\mu V_2^2$ avec pression P_0 en sortie (jet libre) => $P = P_0 + \frac{1}{2}\mu(V_2^2 - V_1^2)$

Donc : $q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = -\vec{F}_{eau \to entonnoir} + PS\vec{u}_x - P_0 s \vec{u}_x$

$$\vec{F}_{eau \to entonnoir} = [-q_m(V_2 - V_1) + PS - P_0 s]\vec{u}_x = [P_0(S-s) + \frac{1}{2}\mu(V_2^2 - V_1^2)S - \mu V_1 S(V_2 - V_1)]\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{eau \to entonnoir} = [P_0(S-s) + \frac{1}{2}\mu(V_1^2\frac{S^2}{s^2} - V_1^2)S - \mu V_1 S(V_1\frac{S}{s} - V_1)]\vec{u}_x$$ en remplaçant V_2 en fonction de V_1

Ce qui donne après simplifications : $\vec{F}_{eau \to entonnoir} = [P_0(S-s) + \frac{1}{2}\mu V_1^2 S\frac{(S-s)^2}{s^2}]\vec{u}_x$

$$\vec{F}_{opérateur \to entonnoir} = -P_0(S-s)\vec{u}_x - \frac{1}{2}\mu V_1^2 S \frac{(S-s)^2}{s^2}\vec{u}_x - \iint_{\substack{\text{surface latérale} \\ \text{de l'entonnoir}}} P_0 d\vec{S}(M)$$

On voit que la pression uniforme P_0 agit sur la surface fermée S U s U $S_{latérale}$: la force résultante est nulle

Finalement : $\boxed{\vec{F}_{opérateur \to entonnoir} = -\frac{1}{2}\mu V_1^2 S \frac{(S-s)^2}{s^2}\vec{u}_x}$