

4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 11

On place une masse m_0 d'eau dans un seau de section S . Ce dernier est attaché à une masse m_0 , donc pour $t \leq 0$, le seau et la masse sont en équilibre. A $t = 0$, on perce un petit trou de section s à la base du seau. L'écoulement de l'eau à la base du seau se fait avec une vitesse u par rapport au seau.

Hypothèses :

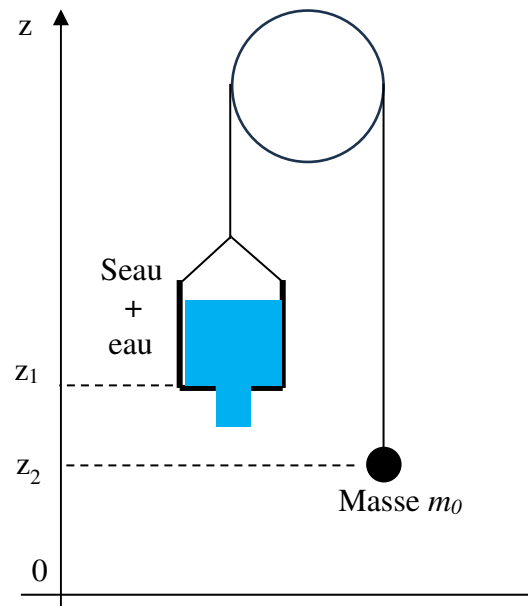
- poulie de masse négligeable
- seau de masse négligeable
- fil inextensible

1-Faire un bilan de quantité de mouvement pour le seau.

2-A l'aide d'hypothèses à préciser, déterminer u .

3-En déduire la masse $m(t)$ du seau.

4-Déterminer l'équation en $z_1(t)$.



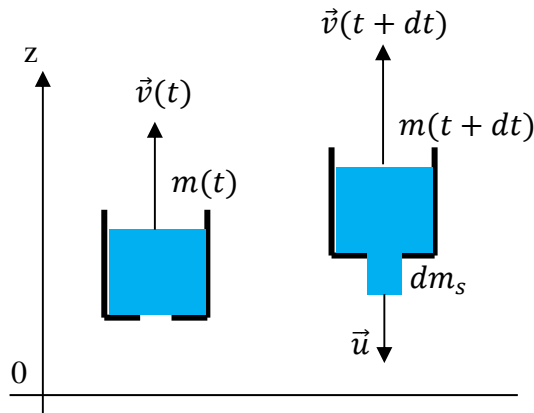
4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 11

1-On se place dans le référentiel terrestre $R(Oxyz)$ galiléen.

Système ouvert (Σ) : le seau et l'eau qu'il contient à l'instant

Système fermé (Σ^*) = (Σ)_t = (Σ)_{t+dt} + dm_s ($dm_s = q_m dt$ petite masse d'eau qui sort pendant dt)

Dans R , la masse d'eau sortante a pour vitesse $\vec{u} + \vec{v}(t + dt)$ (loi de composition des vitesses)



$$\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(\Sigma)}(t)}{dt} = \frac{m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + dm_s(\vec{u} + \vec{v}(t+dt)) - m(t)\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \frac{(m(t) - dm_s)\vec{v}(t+dt) + dm_s(\vec{u} + \vec{v}(t+dt)) - m(t)\vec{v}(t)}{dt} = \frac{m(t)(\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t))}{dt} + \frac{dm_s}{dt}\vec{u}$$

Finalement :
$$\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + q_m \vec{u}$$

2-On se place dans le référentiel R' lié au seau pour que l'écoulement de l'eau soit quasi-stationnaire.

C'est un référentiel non galiléen en translation par rapport au référentiel galiléen R .

Dans l'équation d'Euler, il faut rajouter la densité volumique des forces d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{vie} = -\mu \vec{a}_e = -\mu \ddot{z}_1 \vec{u}_z \Rightarrow \vec{f}_{vpesanteur} + \vec{f}_{vie} = \mu \vec{g} - \mu \vec{a}_e = -\mu(g + \ddot{z}_1) \vec{u}_z$$

Tout se passe comme si la pesanteur apparente était $g + \ddot{z}_1$

Théorème de Bernoulli dans R' sur la ligne de courant AB

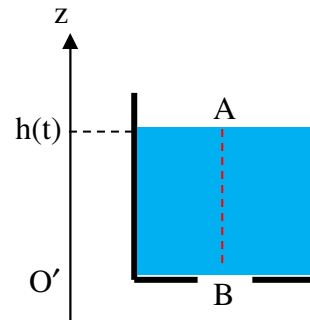
$$P_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \mu(g + \ddot{z}_1)z_A = P_B + \frac{1}{2} \mu v_B^2 + \mu(g + \ddot{z}_1)z_B$$

On a : $v_B = u$ $v_A \approx 0$ car $s \ll S$

$$P_A = P_B = P_0$$

$$z_A - z_B = h(t) \text{ hauteur d'eau à l'instant } t$$

On en déduit :
$$u = \sqrt{2(g + \ddot{z}_1)h(t)}$$



3-On a :
$$m(t) = m_0 - \int_0^t q_m dt = m_0 - \int_0^t \mu s u dt$$

Remarques :

On peut supposer que $\ddot{z}_1 \ll g$ et que le récipient ne se vide quasiment pas pendant la durée de l'ascension soit $h \approx \text{constante} = h$

Dans ce cas : $u = \sqrt{2gh}$ vitesse d'éjection constante

$m(t) = m_0 - \mu s u t$ décroissance affine de la masse à l'intérieure

4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 11

4- Théorème de la quantité de mouvement à (Σ^*) dans R : $\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + q_m \vec{u} = m(t) \vec{g} + \vec{T}$
 En projection selon Oz : $m(t)\ddot{z}_1 - q_m u = -m(t)g + T$

Théorème de la quantité de mouvement pour la masse m_0 dans R selon Oz : $m_0 \ddot{z}_2 = -m_0 g + T$

Or : $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$ donc : $T = m_0(g - \ddot{z}_1)$

Donc : $m(t)\ddot{z}_1 - q_m u = -m(t)g + m_0(g - \ddot{z}_1)$

Soit : $(m(t) + m_0)\ddot{z}_1 = q_m u + (m_0 - m(t))g$

Finalement : $(m(t) + m_0)\ddot{z}_1 = q_m \sqrt{2(g + \ddot{z}_1)h(t)} + (m_0 - m(t))g$

