4.7.2 Bernoulli-Exercice 9

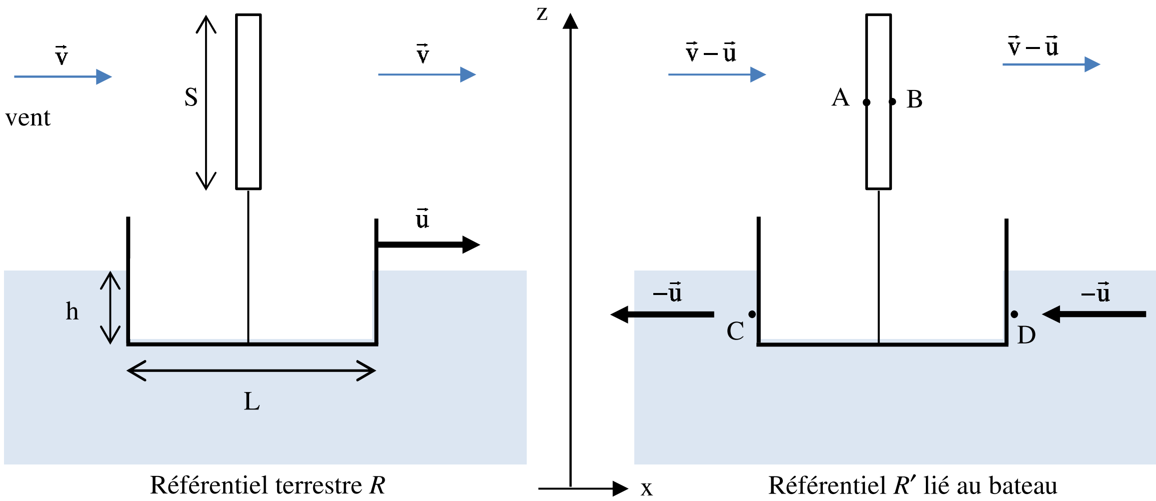
Vous êtes sur une île déserte. Vous avez une baignoire de 100 kg, de dimensions 2mx1mx1m. Vous avez un mât et une voile de 4 m^2. Vous construisez un bateau. Le vent souffle dans votre dos à 25 km/h.

Quelle sera la vitesse de votre bateau en régime stationnaire ?

- On note m la masse du système {baignoire + passager + mat + voile}. On prend : m = 200 kg
- On détermine la profondeur de bateau immergé en traduisant l'équilibre selon Oz entre le poids du système et la poussée d'Archimède : $-mg + \mu_{eau} g h L \ell = 0$ (longueur L = 2m ; largeur ℓ = 1m)

  Donc : $h = \dfrac{m}{\mu_{eau} L \ell}$ A.N : h = 0,1 m

- Dans le référentiel terrestre le bateau avance à la vitesse constante u, l'eau et l'air ne sont pas en écoulement stationnaire car, à deux instants différents, « on ne voit pas » le même écoulement.
  Pour que les fluides eau et air soient en écoulement stationnaire, on se place dans le référentiel *R′* lié au bateau. *R′* est galiléen car le bateau est en translation rectiligne uniforme par rapport à *R*.



Référentiel terrestre *R* Référentiel *R′* lié au bateau

Selon l'axe Ox le bateau est soumis à deux forces :

- $\vec{F}_{air\to bateau} = (P(A) - P(B)) S \vec{u}_x$ - $\vec{F}_{eau\to bateau} = (P(C) - P(D)) h \ell \vec{u}_x$

Le bateau est immobile dans *R′* donc : $\vec{0} = \vec{F}_{air\to bateau} + \vec{F}_{eau\to bateau}$ => $(P(A) - P(B))S + (P(C) - P(D))h\ell = 0$

Ecoulements parfaits (eau et air sont peu visqueux), stationnaires, incompressibles (si la vitesse du vent est très inférieure à celle du son) : on applique le théorème de Bernoulli sur des lignes de courant allant de l'infini vers les points A, B, C ou D. On suppose que A et D sont des points d'arrêts : v(A) = 0 et v(D) = 0

- $$\left.\begin{aligned} &P_{air\infty} + \frac{1}{2}\mu_{air}(v-u)^2 = P(A) \\ &P(B) + \frac{1}{2}\mu_{air}(v-u)^2 = P_{air\infty} + \frac{1}{2}\mu_{air}(v-u)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A) - P(B) = \frac{1}{2}\mu_{air}(v-u)^2$$

- $$\left.\begin{aligned} &P_{eau\infty} + \frac{1}{2}\mu_{eau}u^2 = P(D) \\ &P(C) + \frac{1}{2}\mu_{eau}u^2 = P_{eau\infty} + \frac{1}{2}\mu_{eau}u^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(C) - P(D) = -\frac{1}{2}\mu_{eau}u^2$$

Donc : $\frac{1}{2}\mu_{air}(v-u)^2 S - \frac{1}{2}\mu_{eau}u^2 h\ell = 0$ => $\sqrt{\mu_{air}S}(v-u) = \sqrt{\mu_{eau}h\ell}\,u$

D'où : $\boxed{u = \dfrac{v}{1+\sqrt{\dfrac{\mu_{eau}h\ell}{\mu_{air}S}}}}$ A.N : <u>u = 4,6 km.h^{-1}</u>
