6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 1

On se place dans l'ARQS. On considère un conducteur métallique de conductivité électrique γ occupant le demi-espace $x > 0$.
Le demi-espace $x < 0$ est vide et il y règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_y$

a-Déterminer l'équation vérifiée par le champ magnétique dans le métal.

b-La résoudre en supposant que $\underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{B}(x) e^{i\omega t} \vec{u}_y$ et donner le champ magnétique en notation réelle.
Interpréter la solution obtenue.

c-Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}(x, t)$.

d-La force de Laplace sur un élément de volume $d\tau$ est : $d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$.
Déterminer la force de Laplace moyenne au cours du temps subie par une surface S de métal. Commenter.

e-Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, $\vec{j}$ est déphasé par rapport à $\vec{B}$. De combien ?

6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 1

---

a- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ car $\text{div}\vec{B} = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0\vec{j}) = \mu_0\gamma\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation : $\boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$

b-On reporte $\underline{\vec{B}}(x,t) = \underline{B}(x)e^{i\omega t}\vec{u}_y$ dans l'équation ci-dessus : $\dfrac{d^2\underline{B}(x)}{dx^2} = i\omega\mu_0\gamma\underline{B}(x)$

Equation caractéristiques : $r^2 = i\omega\mu_0\gamma = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\omega\mu_0\gamma = \left(\dfrac{1+i}{\delta}\right)^2$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\omega\gamma}}$

Solutions $r = \pm\dfrac{1+i}{\delta}$ donc : $\underline{B}(x) = Ae^{-\frac{1+i}{\delta}x} + Be^{\frac{1+i}{\delta}x}$

Conditions aux limites : - $\underline{B}(x)$ fini quand x tend vers l'infini => B = 0

- $\underline{B}(0) = B_0$ => A = B_0

Finalement : $\boxed{\underline{\vec{B}}(x,t) = B_0e^{-\frac{x}{\delta}}e^{i(\omega t-\frac{x}{\delta})}\vec{u}_y}$ en notation complexe $\boxed{\vec{B}(x,t) = B_0e^{-\frac{x}{\delta}}\cos(\omega t - \dfrac{x}{\delta})\vec{u}_y}$ en réelle

c- $\vec{j} = \dfrac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{dB}{dx}\vec{u}_z$ d'où : $\boxed{\vec{j}(x,t) = \dfrac{B_0}{\mu_0\delta}e^{-\frac{x}{\delta}}\left[-\cos(\omega t - \dfrac{x}{\delta}) + \sin(\omega t - \dfrac{x}{\delta})\right]\vec{u}_z}$

d- $d\vec{F} = \vec{j}\wedge\vec{B}d\tau = -\dfrac{B_0^2}{\mu_0\delta}e^{-\frac{2x}{\delta}}\left[-\cos^2(\omega t - \dfrac{x}{\delta}) + \cos(\omega t - \dfrac{x}{\delta})\sin(\omega t - \dfrac{x}{\delta})\right]d\tau\vec{u}_x$ d'où : $< d\vec{F} >= \dfrac{B_0^2}{2\mu_0\delta}e^{-\frac{2x}{\delta}}d\tau\vec{u}_x$

Force sur une surface S : $< \vec{F} >= \iiint_V \dfrac{B_0^2}{2\mu_0\delta}e^{-\frac{2x}{\delta}}d\tau\vec{u}_x = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0\delta}S\int_0^{+\infty}e^{-\frac{2x}{\delta}}dx\vec{u}_x = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0\delta}S\dfrac{-\delta}{2}\left[e^{-\frac{2x}{\delta}}\right]_0^{+\infty}\vec{u}_x$

D'où : $\boxed{< \vec{F} >= \dfrac{B_0^2}{4\mu_0}S\vec{u}_x}$ On peut définir une pression de radiation $P = \dfrac{B_0^2}{4\mu_0}$

e-En notation complexe : $\underline{\vec{j}} = \dfrac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{d\underline{B}}{dx}\vec{u}_z$ d'où : $\underline{\vec{j}}(x,t) = \dfrac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = -\dfrac{B_0}{\mu_0\delta}(1+i)e^{-\frac{x}{\delta}}e^{i(\omega t-\frac{x}{\delta})}\vec{u}_z$

En x = 0 : $\underline{\vec{j}}(0,t) = -\dfrac{B_0}{\mu_0\delta}(1+i)e^{i\omega t}\vec{u}_z$ et $\underline{\vec{B}}(0,t) = B_0e^{i\omega t}\vec{u}_y$

Le déphasage de $\vec{j}$ par rapport à $\vec{B}$ est l'argument de -(1+i) soit -3π/4 (ou 5π/4)
