6.8.2 Puits-Exercice 11

On considère une particule confinée dans un puits de potentiel de la forme $V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$

a-Justifier simplement que < x > = 0 et < p > = 0 où p est la quantité de mouvement.

b-On donne pour toute fonction g : $(\Delta g)^2 = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$
Montrer que la particule a une énergie minimale et la déterminer.

c-On donne l'équation de Schrödinger indépendante du temps : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$

- Que signifie solution stationnaire ?
- Montrer que $\varphi(x) = A\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2})$ est une solution à une condition sur α. Vérifier l'homogénéité de cette condition.

---

a-On reconnait l'expression de l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique.
Pour un oscillateur harmonique en mécanique classique : $x = a\cos\omega t$ et $\dot{x} = -a\omega\sin\omega t$

Donc : $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p \rangle = 0$

b-On a : $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle$ et $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$ car $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p \rangle = 0$

L'énergie mécanique de l'oscillateur est : $E = E_c + E_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$

Energie mécanique moyenne : $E_{moy} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\Delta x)^2$

<u>Inégalité spatiale de Heisenberg</u> : $\Delta x.\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ => $(\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}$

Donc : $E_{moy} \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\Delta x)^2 = E_{min}$

Quand Δx augmente (resp. diminue) le terme d'énergie potentielle augmente (resp. diminue) et le terme d'énergie cinétique diminue (resp. augmente). Il existe une valeur de Δx qui minimise E_{min}. On la trouve en dérivant E_{min} par rapport à Δx.

$$\frac{dE_{min}}{d\Delta x} = -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega_0^2(\Delta x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

En reportant cette valeur de Δx dans l'expression de E_{min}, on trouve : $\boxed{E_{min} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0}$

c-• Solution stationnaire si la fonction d'onde s'écrit : $\Psi_{es}(x,t) = \varphi(x)e^{-i\omega t} = \varphi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$
La densité linéique de probabilité de présence est alors <u>indépendante du temps</u>.

- On calcule : $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = -\frac{2A}{\alpha^2}\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2}) + \frac{4x^2}{\alpha^4}A\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2})$

Donc : $-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{2A}{\alpha^2}\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2}) + \frac{4x^2}{\alpha^4}A\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2})\right] + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 A\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2}) = EA\exp(-\frac{x^2}{\alpha^2})$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{4x^2}{\alpha^4}\right] + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = E \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{m\alpha^2} = E \text{ et } \frac{1}{2}m\omega_0^2 = \frac{2\hbar^2}{m\alpha^4}$$

D'où : $\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}}$ et on retrouve $E = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$

$\hbar$ en J.s = $kg.m^2.s^{-1}$ $m\omega_0$ en $kg.s^{-1}$ donc <u>α en m</u>
