Exercice 1. [CCINP] Soit Φ la fonction définie par :

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(\ln t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de Φ.
2. Montrer que Φ est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que Φ est solution de l'équation $y' - \frac{x}{2} y = 0$.
4. En déduire une expression de $\Phi(x)$.
   Indication : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2. [CCINP 23] On admet que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \, \mathrm{d}t$$
   est convergente.
   Montrer que
$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \, \mathrm{d}t$$
   est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}$.
   En déuire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.
3. Calculer
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} \, \mathrm{d}t.$$
   En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.