Cuisson d'un œuf

On s'intéresse à la cuisson d'un œuf de poule (**figure 1**). Celui-ci est constitué d'une coquille calcaire contenant principalement deux zones distinctes : l'une périphérique appelée « blanc » (albumen) et l'autre centrale appelée « jaune » (vitellus). Ces deux zones sont fluides avant cuisson.

Figure 1 Intérieur d'un œuf cuit sans sa coquille (en avant-plan) et œuf avec sa coquille (en arrière-plan)

Lors de la cuisson, les températures de solidification du blanc et du jaune sont différentes. On peut réaliser diverses expériences pour s'en rendre compte (**figure 2**).

Expériences *Disposer de l'eau froide du robinet dans trois casseroles (russes)* **[protocole n°1(a)]** Verser un œuf dans une russe Chauffer à 70°C - *Observer*	**Protocole n°1 (a) :** A partir de 62°C le blanc de l'œuf commence à coaguler A 70°C le blanc est totalement coagulé mais le jaune est liquide lorsque l'on coupe l'œuf	***Œufs :*** *Coagulation des protéines des œufs à partir d'environ 62°C*
[protocole n°2(a)] Verser un blanc d'œuf dans une russe Chauffer à 70°C - *Observer*	**Protocole n°2 (a) :** A partir de 62°C le blanc de l'œuf commence à coaguler La couleur du blanc s'opacifie, à 70° la coagulation est totale	***Blancs :*** *Début de coagulation de l'ovalbumine (protéines des blancs) à 62°C, formation d'un gel très ferme à 70°C*
[protocole n°2(b)] Verser un jaune d'œuf dans une russe Chauffer à 85°C - *Observer*	**Protocole n°2 (b) :** A partir de 65°C le jaune d'œuf commence à coaguler, à 85°C le jaune est totalement coagulé	***Jaunes :*** *- Début de l'épaississement à 65°C par coagulation des protéines du jaunes(ovovitelline), perte de fluidité à 70°C, coagulation totale à 85°C.*

Figure 2 Tableau extrait de « *Les propriétés physico-chimiques de l'œuf et ses applications* », **CREG académie de Versailles**

Cette différence de température engendre de nombreuses applications culinaires. On cherche ici à modéliser divers phénomènes thermiques intervenant lors de la cuisson d'un œuf.

Durée de cuisson

La durée de cuisson d'un œuf de taille standard, sortant du réfrigérateur à $T_0 = +4\,°\mathrm{C}$, est de l'ordre de 10 min dans l'eau bouillante (œuf « dur »). Dans un premier modèle, on considère que la température de l'intérieur de l'œuf est uniforme à tout instant et on le considère de forme sphérique de rayon $R = 2$ cm. On rappelle que les échanges conducto-convectifs à l'interface solide-fluide sont modélisés par la relation de Newton

$$\vec{j}_Q = h\,(T_{\mathrm{sol}} - T_{\mathrm{flu}})\,\vec{u}_{\mathrm{sol}\to\mathrm{flu}}$$

avec $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique à l'interface entre le solide et le fluide.

1. Déterminer, à partir d'un bilan d'énergie sur l'œuf, une équation différentielle modélisant l'évolution de la température de l'œuf au cours du temps, de la forme

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \alpha T = \beta$$

   où l'on donnera les expressions de α et β en fonction du coefficient h, de la température de l'eau bouillante T_{ext}, du rayon de l'œuf R, de sa masse volumique μ et de sa capacité thermique massique c.
   Résoudre cette équation en déterminant $T(t)$.
   Déterminer l'expression de la durée t_c au bout de laquelle l'intérieur de l'œuf a atteint sa température de cuisson T_c.
   En déduire une valeur approchée du coefficient h.

On prendra $\mu = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ et $c = 3{,}3\ \mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Profil intérieur de cuisson

On modélise un œuf par une sphère de rayon R, avec une répartition à symétrie sphérique du blanc et du jaune (**figure 3**).

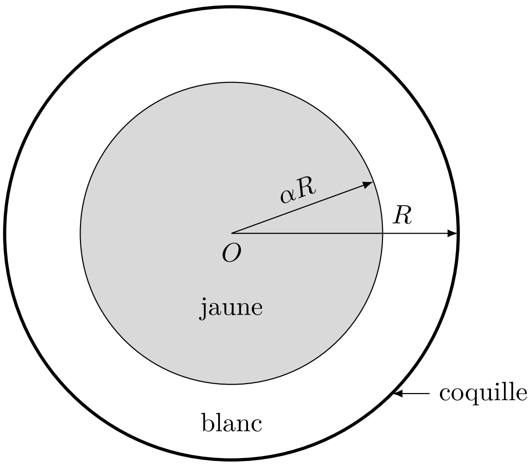

Figure 3 Modélisation sphérique d'un œuf

2. Montrer que, compte-tenu de la symétrique sphérique du problème, l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)$$

   Donner le nom et l'expression du coefficient D.
   Déterminer l'expression de l'ordre de grandeur de la durée τ associée au phénomène de diffusion thermique décrit.
   Calculer τ pour $R = 2$ cm et $D = 1{,}4 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$. Commenter le résultat.
   Déterminer comment évolue cette durée si un œuf a un volume double du précédent.

On souhaite maintenant modéliser numériquement l'évolution au cours du temps du profil de température au sein de l'œuf. On utilise pour cela la méthode d'Euler pour discrétiser l'équation précédente.

Le principe adopté est le suivant. Le profil de température initial $T(r, t = 0)$ au sein de l'œuf est connu. On pose comme variable intermédiaire :

$$\Theta(r,t) = \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}$$

À chaque instant t_i, on utilise l'équation pour calculer les valeurs de $\Theta(r, t_i)$ et mettre à jour les valeurs de $T(r, t_i)$. On peut ainsi obtenir le profil de température $T(r, t = t_n)$.

3. Justifier, à l'aide de la méthode d'Euler, que le principe de résolution revient à utiliser les équations numériques suivantes :

$$\begin{cases} \Theta_j \leftarrow \dfrac{T_{j+1} - T_j}{\ell_e} \\ T_k \leftarrow T_k + \tau_e\, D\, \dfrac{1}{\left((k+1)\,\ell_e\right)^2} \dfrac{\left((k+1)\,\ell_e\right)^2 \Theta_{k+1} - (k\,\ell_e)^2\,\Theta_k}{\ell_e} \end{cases}$$

avec τ_e et ℓ_e les périodes d'échantillonnage (ou « pas ») temporelle et spatiale de la résolution numérique.

Le programme `2016-004.py` permet de représenter l'évolution du profil de température au sein de l'œuf jusqu'à l'instant t_n. La cuisson s'effectue à 100 °C et on considère un œuf sorti du réfrigérateur à 4 °C.

4. Modifier le profil initial de température puis exécuter le programme pour représenter l'évolution de $T(r)$ jusqu'à une date t_n choisie par vos soins.
   Par tâtonnement, en modifiant la valeur de t_n, déterminer une estimation de la durée t_c nécessaire pour que l'œuf soit « dur », c'est à dire que le blanc et le jaune soient totalement coagulés. Commenter le résultat.

On considère que la répartition du jaune dans un œuf vérifie $\alpha \simeq 0{,}8$.

5. Par tâtonnement, en modifiant la valeur de t_n, déterminer la durée nécessaire pour que l'œuf soit « à la coque », c'est à dire que le blanc soit totalement coagulé, mais pas le jaune. Commenter le résultat.

L'œuf dit « parfait » (**figure 4**), servi dans certains restaurants, s'obtient à l'aide d'une cuisson à 64,5 °C.

Figure 4 Photographie d'un œuf dit « parfait »

6. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée nécessaire pour que l'œuf soit « parfait ».

En réalité le blanc et le jaune n'ont pas tout à fait la même conductivité thermique, elle est même dans un rapport double. On peut trouver que pour le blanc $D_b = 1{,}7 \times 10^{-7}$ m^2·s^{-1} et que pour le jaune $D_j = 1{,}0 \times 10^{-7}$ m^2·s^{-1}.

7. Modifier le programme pour tenir compte de cette différence et estimer à nouveau le temps de cuisson d'un œuf. Commenter le résultat.

8. Modifier le programme pour représenter l'évolution de la température à cœur de l'œuf au cours du temps. Commenter le résultat.