Physique

Fiche – Ajustement affine ou linéaire ?

L. Torterotot

✎ *Cette fiche vient compléter les contenus développés dans les fiches « Incertitudes expérimentales » et « Régression linéaire et méthode de Monte-Carlo » qu'il faut avoir consulté avant. Les données numériques utilisées dans la fiche « Régression linéaire et méthode de Monte-Carlo » sont d'ailleurs à nouveau exploitées ici.*

1 Position du problème

L'étude théorique d'un phénomène physique conduit parfois à une modélisation linéaire du type $y = a_{\mathrm{th}}x$. Dans une telle situation, il est légitime de se demander s'il faut effectuer un ajustement linéaire, du type $y = ax$, ou un ajustement affine, du type $y = ax + b$[1]. Dans le cadre d'une démarche expérimentale, il est raisonnable de procéder comme suit :

1. Effectuer un ajustement affine, déterminer les paramètres ajustés a_{af} et b_{af} et leurs incertitudes ;

   ✎ *Même si le comportement attendu est linéaire, il est raisonnable de commencer par un ajustement affine. En effet, une erreur systématique se traduit souvent (mais pas nécessairement) par un terme constant. De plus, l'ajout du paramètre d'ajustement constant n'augmente pas la difficulté numérique de l'ajustement, au contraire d'un terme quadratique par exemple.*

2. Vérifier la pertinence de l'ajustement affine (« Les points forment-ils une droite ? »[2]) ;
3. Vérifier si b_{af} est compatible avec la valeur nulle (avec l'écart normalisé $|b_{\mathrm{af}}|/u(b_{\mathrm{af}})$) ;
4. Si oui, effectuer un ajustement linéaire, déterminer le paramètre ajusté a_{li} et son incertitude ; Sinon, une erreur systématique est présente ou un phénomène physique a été omis dans le modèle, il faut alors en déterminer l'origine.

2 Exemple sur un cas concret

Détermination d'un indice optique, dont la valeur vraie est 1,33, à partir de :

— mesures de l'angle incident avec un rapporteur gradué au degré et $y = \sin\theta_{\mathrm{i}}$;
— mesures de l'angle réfracté avec un rapporteur gradué au degré et $x = \sin\theta_{\mathrm{r}}$;
— la relation de Snell-Descartes dans le cas d'une dioptre entre un milieu d'indice $n_{\mathrm{i}} = 1$ et un autre d'indice $n_{\mathrm{r}} = n = 1{,}33$,

$$\sin(\theta_{\mathrm{i}}) = n\sin(\theta_{\mathrm{r}}) \quad \text{ainsi} \quad y = ax \quad \text{avec} \quad y = \sin\theta_{\mathrm{i}}\,, \quad a = n\,, \quad x = \sin\theta_{\mathrm{r}} \quad \text{et} \quad b = 0\,.$$

2.1 Mesure unique

Plus rapide car il y a donc moins de mesures à réaliser, il s'agit toutefois de la méthode la moins précise. Ici, avec :

— une mesure de l'angle incident avec un rapporteur gradué au degré $\theta_{\mathrm{i}} = (45{,}00 \pm 0{,}29)\,°$[3] ;
— une mesure de l'angle réfracté avec un rapporteur gradué au degré $\theta_{\mathrm{r}} = (32{,}00 \pm 0{,}29)\,°$;
— la relation de Snell-Descartes, $n = \sin(\theta_{\mathrm{i}})/\sin(\theta_{\mathrm{r}})$;

la méthode de Monte-Carlo[4] donne $n = 1{,}334 \pm 0{,}013$.

1. Ce qui pourrait également s'écrire $y = a(x - x_0)$ ou encore $y - y_0 = ax$.
2. Voir la fiche « Régression linéaire et méthode de Monte-Carlo ».
3. La détermination de $u(\theta_{\mathrm{i}})$ est l'objet de la fiche « Incertitudes expérimentales ».
4. Voir la fiche « Régression linéaire et méthode de Monte-Carlo ».

2.2 Ajustement affine $y = a_{\mathrm{af}}x + b_{\mathrm{af}}$

Comme $\sin\theta_\mathrm{i} = n\sin\theta_\mathrm{r}$, $a_{\mathrm{af}} = n$ et *a priori* $b_{\mathrm{af}} = 0$. Un *ajustement affine*, figure 1, permet d'obtenir, avec la méthode de Monte-Carlo, $a_{\mathrm{af}} = 1{,}3361 \pm 0{,}0055$ et $b_{\mathrm{af}} = -0{,}0031 \pm 0{,}0029$. Ainsi, $n = 1{,}3361 \pm 0{,}0055$, ce qui est plus précis que dans l'exemple de la mesure unique. Une régression linéaire est plus précise qu'une mesure unique car en elle comporte plusieurs.

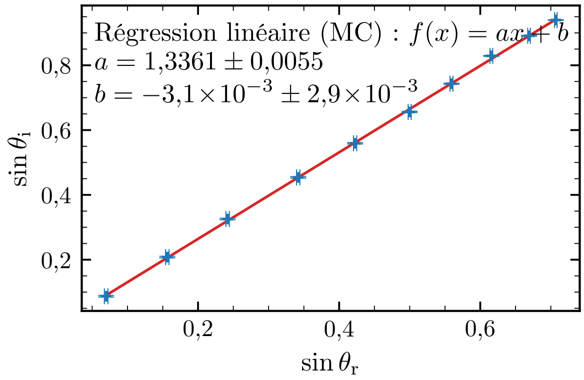

Figure 1 – *Ajustement affine.*

De plus, l'écart normalisé de b à la valeur nulle est $|b_{\mathrm{af}}|/u(b_{\mathrm{af}}) = 1{,}07 < 2$. La valeur du paramètre b_{af} est donc compatible avec 0. Il est alors possible de réaliser un ajustement linéaire, c'est-à-dire déterminer n en supposant une relation de proportionnalité entre $\sin\theta_\mathrm{i}$ et $\sin\theta_\mathrm{r}$.

2.3 Ajustement linéaire $y = a_{\mathrm{li}}x$

Pour forcer « $b = 0$ », il est possible de calculer le rapport y/x pour chaque couple de mesures, qui doit être égal à a_{li}. Cela reprend le calcul fait avec une mesure unique mais se base sur l'ensemble des N mesures. Alors, la valeur de a_{li} (ici, n) est estimée à la *moyenne des N rapports* et l'incertitude à l'écart-type de la liste des valeurs des N rapports divisé par $\sqrt{N}$[5]. Sur la figure 2, les valeurs des rapports ainsi obtenues est « tracée » dans le même ordre que les points de la figure 1.

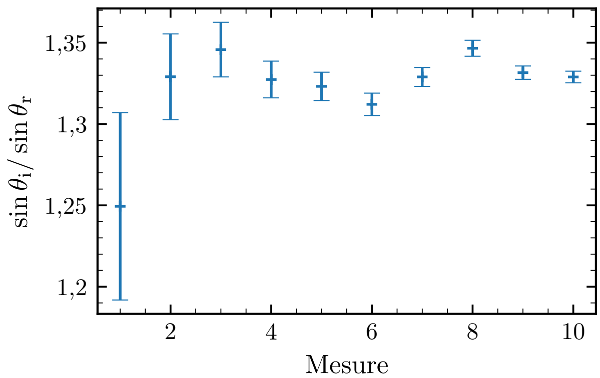

Figure 2 – *Valeurs obtenues avec un ajustement linéaire. Attention, ce n'est qu'une visualisation graphique de la liste des valeurs ! Les barres d'incertitude sont tracées à titre informatif, elles ne sont pas utilisées pour obtenir a_{li}.*

Le résultat est $n = a_{\mathrm{li}} = 1{,}3223 \pm 0{,}0087$, ce qui est ici moins précis qu'avec l'ajustement affine, car le premier rapport tire la moyenne vers le bas. Il semble de plus non pertinent par rapport aux autres (valeur sensiblement différente, grande incertitude). En le retirant, $n = a_{\mathrm{li}} = 1{,}3304 \pm 0{,}0035$.

3 Bilan

Les valeurs obtenues pour n avec les différentes méthodes ainsi que les écarts normalisés à la valeur de référence de 1,33 sont donnés dans le tableau 1. Les incertitudes les plus importantes sont obtenues avec une méthode « mesure unique ». L'utilisation de plusieurs mesures permet d'être plus précis.

Méthode	n	E_N
mesure unique : $n = y/x$	$1{,}334 \pm 0{,}013$	0,34
mesure unique (premier point)	$1{,}25 \pm 0{,}12$	0,69
affine : $y = a_{\mathrm{af}}x + b_{\mathrm{af}}$, $n = a_{\mathrm{af}}$	$1{,}3361 \pm 0{,}0055$	1,1
linéaire : $y = a_{\mathrm{li}}x$, $n = a_{\mathrm{li}}$	$1{,}3223 \pm 0{,}0087$	0,89
linéaire (sans premier point)	$1{,}3304 \pm 0{,}0035$	0,11

Tableau 1 – *Récapitulatif des résultats.*

Dans le cas de l'ajustement affine, l'écart normalisé est le plus important car l'incertitude est certes plus faible mais la valeur obtenue (1,3361) subit l'effet du premier point. Cela se voit peu sur la figure 1. En revanche, l'ajustement affine permet de voir qu'un ajustement linéaire est envisageable.

Cet ajustement linéaire est pourtant moins précis à cause, ici, du premier point. Dans le cas où une valeur « aberrante » est repérée, il faut si possible refaire la mesure. Sinon, il faut motiver son retrait. Ici, c'est la forte incertitude sur la valeur du rapport, en comparaison aux autres, qui le permet. Avec les mesures restantes, le résultat est bien plus précis et proche de la valeur de référence.

Enfin, quelle que soit la méthode choisie, ici l'écart normalisé est systématiquement inférieur à 2, elles permettent donc toutes d'obtenir une valeur expérimentale cohérente.

5. Voir la fiche « Incertitudes expérimentales ».