

Corrigé du DL n° 5.

Séries entières et intégration

Partie 1

1. La fonction arctangente est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t^2 + 1}$ est continue sur $[0, 1]$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, $\arctan((-x)t) = -\arctan(xt)$ (arctangente est impaire), donc f est impaire.

2. Comme $\arctan(0) = 0$, on a $f(0) = 0$. Puis $f(1) = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^2 + 1} dt = \left[\frac{\arctan(t)^2}{2} \right]_0^1$, donc $f(1) = \frac{\pi^2}{32}$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y > x$. On a $f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{\arctan(yt) - \arctan(xt)}{t^2 + 1} dt$. Or, pour $t \in [0, 1]$, on a $yt \geq xt$, donc par croissance de l'arctangente, $\frac{\arctan(yt) - \arctan(xt)}{t^2 + 1} \geq 0$. Mais l'arctangente est en fait strictement croissante, et pour $t > 0$, on a $\frac{\arctan(yt) - \arctan(xt)}{t^2 + 1} > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{\arctan(yt) - \arctan(xt)}{t^2 + 1}$ est donc continue, positive et non nulle sur $[0, 1]$, donc son intégrale sur $[0, 1]$ est strictement positive, i.e. $f(y) > f(x)$.

4. La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan'(x)| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Soient alors $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \frac{\arctan(yt) - \arctan(xt)}{t^2 + 1} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\arctan(yt) - \arctan(xt)}{t^2 + 1} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 |\arctan(yt) - \arctan(xt)| dt \leq \int_0^1 |yt - xt| dt = |y - x| \int_0^1 t dt = \frac{|y - x|}{2}, \end{aligned}$$

donc f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne, donc uniformément continue.

5. (a) i. Comme $xt \geq 0$, on a $0 \leq \arctan(xt) < \frac{\pi}{2}$, donc $\left| \frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right|$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$\left| \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon.$$

- ii. Comme $xt > 0$, on a $\left| \frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right| = \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)$. De plus, $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$, et comme l'arctangente est 1-lipschitzienne, on a $|\arctan(u)| = |\arctan(u) - \arctan(0)| \leq |u|$, donc par croissance de l'intégrale, on a

$$\left| \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right) dt \right| \stackrel{\varepsilon < 1}{\leq} \int_\varepsilon^1 \left| \frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right| dt \stackrel{0 \leq \varepsilon}{\leq} \int_\varepsilon^1 \arctan\left(\frac{1}{xt}\right) dt \leq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{xt} dt = \frac{-\ln(\varepsilon)}{x} = \frac{|\ln(\varepsilon)|}{x}$$

(b) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^1 \frac{\pi/2}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi^2}{8}$. Fixons $1 > \varepsilon > 0$. Pour $x > 0$, on a

$$\left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \left| \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right) dt \right| + \left| \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \right) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon + \frac{|\ln(\varepsilon)|}{x}.$$

Soit alors $A = \frac{|\ln(\varepsilon)|}{\varepsilon}$, qui ne dépend que de ε . Si $x \geq A$, alors $\frac{|\ln(\varepsilon)|}{x} \leq \varepsilon$, et donc

$$\left| f(x) - \frac{\pi^2}{8} \right| \leq \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction arctangente est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre a et b , on a

$$\left| \arctan(b) - \arctan(a) - \frac{b-a}{1+a^2} \right| = \left| \arctan(b) - \arctan(a) - \arctan'(a)(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2!} \sup |\arctan''|.$$

Or, $|\arctan''(u)| = \frac{2|u|}{(1+u^2)^2} \leq 2$ (car $(1+u^2)^2 - 2|u| = u^4 + u^2 + (|u| - 1)^2 \geq 0$), donc

$$\left| \arctan(b) - \arctan(a) - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \times 2 = (b-a)^2.$$

7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$. On a donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} - \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(x^2t^2+1)} dt \right| &= \frac{1}{|y-x|} \left| \int_0^1 \left(\frac{\arctan(yt)}{1+t^2} - \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} - \frac{t(y-x)}{(t^2+1)(x^2t^2+1)} \right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|y-x|} \int_0^1 \left| \frac{\arctan(yt)}{1+t^2} - \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} - \frac{t(y-x)}{(t^2+1)(x^2t^2+1)} \right| dt \\ &= \frac{1}{|y-x|} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \left| \arctan(yt) - \arctan(xt) - \frac{t(y-x)}{x^2t^2+1} \right| dt \\ &\stackrel{\text{iné. moy.}}{\leq} \frac{1}{|y-x|} \int_0^1 \left| \arctan(yt) - \arctan(xt) - \frac{t(y-x)}{x^2t^2+1} \right| dt \\ &\stackrel{\text{q6}}{\leq} \frac{1}{|y-x|} \int_0^1 \frac{(yt-xt)^2}{2} dt \\ &= \frac{|y-x|}{2} \int_0^1 t^2 dt = \frac{|y-x|}{6} \xrightarrow{y \rightarrow x} 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'affirmation de l'énoncé.

8. — Cas $x^2 = 1$: on a $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$ donc

$$\boxed{f'(1) = f'(-1) = \frac{1}{4}}.$$

— Cas $x^2 \neq 1$: on effectue le changement de variable $u = t^2$ (fonction C^1). Alors $du = 2t dt$, les bornes ne changent pas, et

$$f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} du.$$

Une DES donne alors

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-1/x^2} \times \frac{1}{1+x^2u} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2u} - \frac{1}{1+u} \right),$$

et donc $f'(x) = \frac{\ln(1+x^2) - \ln(2)}{2(x^2-1)}$.

Conclusion :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(2)}{2(x^2-1)} & \text{si } x^2 \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, par quotient de fonctions continues, f' est continue, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Prouvons la continuité de f' en ± 1 , ce qui prouvera que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Or, si $u \neq 1$,

$$\frac{\ln(1+u) - \ln(2)}{u-1} \xrightarrow{u \rightarrow 1} \frac{d[\ln(1+u)]}{du} \Big|_{u=1} = \frac{1}{2},$$

donc par composée de limites,

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x^2) - \ln(2)}{2(x^2-1)} \xrightarrow{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{4} = f'(1) = f(1).$$

Partie 2

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$, et donc

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

On intègre alors entre 0 et $x \in \mathbb{R}$, pour obtenir la formule demandée.

2. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $x = 1$ dans 9,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt.$$

Mais, par croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt \right| \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la série converge et $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$.

3. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, par 1, et linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{1+t^2} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{F_n(xt)}{1+t^2} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} I_k x^{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{F_n(xt)}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a par croissance de l'intégrale,

$$|F_n(x)| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

donc encore par croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_0^1 \frac{F_n(xt)}{t^2+1} dt \right| \leq \int_0^1 |F_n(xt)| dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(2n+4)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

car $|x| \leq 1$.

On en déduit que la série converge et que
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_n x^{2n+1}.$$

5. (a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = t^2$ dans I_n : $du = 2dt$, et les bornes restent inchangées. On a donc

$$\begin{aligned} 2(-1)^n I_n &= (-1)^n \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du = \int_0^1 \frac{(-u)^n}{1+u} du = - \int_0^1 \frac{1 - (-u)^n}{1+u} du + \int_0^1 \frac{1}{1+u} du \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k du + \ln(2) = - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 u^k du + \ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \ln(2) = u_n \end{aligned}$$

(b) D'après (a), on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{2k+1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} I_k = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} I_k - 2I_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2f(1) - \ln(2),$$

donc la série converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2n+1} = \frac{\pi^2}{16} - \ln(2).$$

6. C'est une série spéciale alternée, donc elle converge. Donc (u_n) admet une limite finie ℓ . Si $\ell \neq 0$, alors $\frac{u_n}{2n+1} \sim \frac{\ell}{2n}$, qui est le terme général d'une série divergente de signe constant, donc $\sum \frac{u_n}{2n+1}$ diverge : contradiction.

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$