

1. Machine de Szilard à une particule

1. Equation d'état du gaz parfait: $PV = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T$ Or $N=1 \Rightarrow P = \frac{k_B T}{V}$

2. Evolution réversible: $W_c = \int_{V_1}^{V_2} P dV = -k_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow W_c = -k_B T \ln 2$

Le mécanisme ne fournit du travail au gaz que durant l'étape c.
Donc:

$$W_m = -W_c = k_B T \ln 2 \quad \text{Où } W_m \text{ est mesuré par le mécanisme}$$

3. $W = W_c = -k_B T \ln 2$

Pour un cycle: $\Delta U = W + Q = 0$ donc: $Q = k_B T \ln 2$

4. Pour un cycle: $\Delta S = 0$

Second principe: $\Delta S = S_e + S_c = \frac{Q}{T} + S_c$ avec $S_c \geq 0$

$$\Rightarrow S_c = -\frac{Q}{T} < 0 \quad \text{contradictoire avec } S_c \geq 0$$

5. $U = E_c = \frac{3}{2} k_B T$

6. Pour l'étape c où T est constante: $\Delta U = 0$ et $\Delta U = W_c + Q_c \Rightarrow Q_c = -W_c$

Donc: $Q_c = k_B T \ln 2$

L'étape c est réversible: $(\Delta S)_c = S_c = \frac{Q_c}{T} \Rightarrow (\Delta S)_c = k_B \ln 2$

7. Premier principe pour l'étape AB: $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$

Or $\Delta U_{AB} = 0$ car T = constante et $W_{AB} = 0$ donc: $Q_{AB} = 0$

8. $\Delta S_{AB} = S_e + S_c = \frac{Q_{AB}}{T} + S_c = S_c \geq 0$ donc $\Delta S_{AB} \geq 0$

Pour le cycle complet: $\Delta S_{AB} + (\Delta S)_c = 0$ donc $\Delta S_{AB} = -(\Delta S)_c = -k_B \ln 2 < 0$

$\Rightarrow$ il y a une contradiction.

2. Prise en compte de la mémoire: machine de Landauer

9. $W_{\text{init}} = W_{\text{mécanisme} \rightarrow \text{gaz}} = \int_V^{V/2} P dV = \int_V^{V/2} \frac{k_B T}{V} dV = -k_B T \ln \left(\frac{V/2}{V} \right) \Rightarrow W_{\text{init}} = k_B T \ln 2$

10. $W_{\text{mesuré par le mécanisme}} = W_m - W_{\text{init}}$ donc: $W_{\text{mesuré par le mécanisme}} = 0$

11. Premier principe à la mémoire: $\Delta U = W_{\text{init}} + Q_R = 0$ car T = constante

Donc: $Q_R = -k_B T \ln 2$

12. Pour un cycle: $\Delta S = 0$

Second principe pour la machine: $\Delta S = S_e + S_c = \frac{Q}{T} + S_c = \frac{Q_R + Q_c}{T} + S_c$

Or $Q_R + Q_c = 0$. Donc $S_c = 0$.

Le second principe est respecté. Le cycle complet est réversible.

13. L'entropie est une fonction d'état donc ΔS_{R_2} a la même valeur que pour le déplacement lent: $\Delta S_{R_2} = \frac{Q_R}{T} = -k_B \ln 2$

Second principe pour la mémoire lors du déplacement rapide: $\Delta S_{R_2} = \frac{Q_R'}{T} + \underbrace{S_c}_{\geq 0}$

Or $Q_R' = -W_{\text{init}}$

Donc: $-k_B \ln 2 = \frac{-W_{\text{init}}}{T} + S_c \Rightarrow W_{\text{init}} = k_B T \ln 2 + T \underbrace{S_c}_{\geq 0}$

Le travail effectué par le mécanisme est supérieur à la valeur trouvée à la question 9. $k_B T \ln 2$ est le travail minimal à fournir par le mécanisme.

14. Coût énergétique minimal: $k_B T \ln 2 \cdot 10^9 \cdot 8 = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ J}$

C'est très faible devant la puissance d'un ordinateur qui est de l'ordre de 100 W.

15. On retire la paroi puis on observe la particule M. A un instant où elle se trouve à gauche (bit 0) on réintroduit la paroi au milieu de l'enceinte mémoire.

A priori ce protocole n'est pas compatible avec le principe de Landauer qui dit qu'il est impossible de réinitialiser un bit sans dépenser de travail.

Mais ce protocole est incomplet. En effet, pour observer la particule et agir en conséquence, il faut à nouveau stocker de l'information. Pour utiliser ce protocole à la fin du cycle de Landauer, il faudrait une troisième particule dans une troisième enceinte.

3. Une machine de Szilard à N particules

16. $P_G = P_D \Rightarrow \frac{N_G k_B T}{V_{Ge}} = \frac{N_D k_B T}{V_{De}} \Rightarrow V_{De} = \frac{N - N_G}{N_G} V_{Ge} = \left(\frac{N}{N_G} - 1\right) V_{Ge}$

Et on a aussi: $V_{Ge} + V_{De} = V$

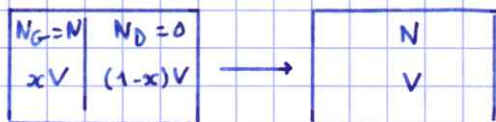
D'où: $V_{Ge} = V \frac{N_G}{N}$ et $V_{De} = V \left(1 - \frac{N_G}{N}\right)$

17.



$$W_{\text{méca} \rightarrow \text{gaz}} = \int_{(1-x)V}^V -P dV = \int_{(1-x)V}^V -\frac{N k_B T}{V} dV = -N k_B T \ln \frac{V}{(1-x)V} = N k_B T \ln(1-x)$$

Donc: $W_m(N_G=0) = -N k_B T \ln(1-x)$ (travail mesuré par le mécanisme)



$$W_{\text{méca} \rightarrow \text{gaz}} = \int_{xV}^V -P dV = \int_{xV}^V -\frac{N k_B T}{V} dV = -N k_B T \ln \frac{V}{xV} = N k_B T \ln x$$

Donc: $W_m(N_G=N) = -N k_B T \ln x$

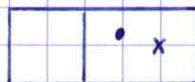


$$\begin{aligned}
 W_{\text{méca} \rightarrow \text{gaz}} &= \int_{xV}^{V_{Ge}} -P_G dV + \int_{(1-x)V}^{V_{De}} -P_D dV = \int_{xV}^{V_{Ge}} -\frac{N_G k_B T}{V} dV + \int_{(1-x)V}^{V_{De}} -\frac{N_D k_B T}{V} dV \\
 &= -N_G k_B T \ln \frac{V_{Ge}}{xV} - N_D k_B T \ln \frac{V_{De}}{(1-x)V} \\
 &= -k_B T \left(N_G \ln \frac{N_G}{xN} + N_D \ln \frac{(1-N_G/N)}{1-x} \right) = -W_{\text{gaz} \rightarrow \text{mécanisme}}
 \end{aligned}$$

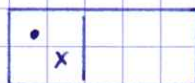
D'où: $W_m(N_G) = k_B T \left(N_G \ln \left(\frac{N_G}{xN} \right) + N_D \ln \left(\frac{N - N_G}{(1-x)N} \right) \right)$

18. $P_G = \frac{xV}{V} \Rightarrow P_G = x$ $P_D = \frac{(1-x)V}{V} \Rightarrow P_D = 1-x$

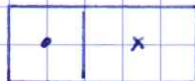
19.



probabilité $\left(\frac{(1-x)V}{V} \right)^2 \Rightarrow P(0) = (1-x)^2$



probabilité: $\left(\frac{xV}{V} \right)^2 \Rightarrow P(2) = x^2$



probabilité $\left(\frac{xV}{V} \right) \left(\frac{(1-x)V}{V} \right)$



probabilité $\left(\frac{xV}{V} \right) \left(\frac{(1-x)V}{V} \right)$

$\Rightarrow P(1) = 2x(1-x)$

On vérifie qu'on a bien $(1-x)^2 + x^2 + 2x(1-x) = 1 + x^2 - 2x + x^2 + 2x - 2x^2 = 1$

20. $P(N_G) =$ probabilité d'avoir N_G particules parmi les N dans le compartiment de gauche

Donc: $P(N_G) = C_N^{N_G} x^{N_G} (1-x)^{N-N_G}$

21. $\bar{W}_m = \sum_{N_G=0}^N P(N_G) W_m(N_G)$

22. $N=1$: $\bar{W}_m = P(0) W_m(0) + P(1) W_m(1)$
 $= (1-x)(-k_B T \ln(1-x)) + x(-k_B T \ln x)$
 $= -k_B T ((1-x) \ln(1-x) + x \ln x)$

$\frac{d\bar{W}_m}{dx} = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ - $\bar{W}_m$ est maximum pour $x = \frac{1}{2}$

$N=2$: $\bar{W}_m = P(0) W_m(0) + P(1) W_m(1) + P(2) W_m(2)$
 $= (1-x)^2 (-2k_B T \ln(1-x)) + 2x(1-x) k_B T \left(\ln \left(\frac{1}{2x} \right) + \ln \left(\frac{1}{2(1-x)} \right) \right) + x^2 (-2k_B T \ln x)$

$\bar{W}_m = -2k_B T \left[(1-x)^2 \ln(1-x) + x(1-x) \ln(4x(1-x)) + x^2 \ln x \right]$

$\frac{d\bar{W}_m}{dx} = 0$ à nouveau et après long calcul pour $x = \frac{1}{2}$

23. Pour $N=1$ (partie 1): $\frac{W_m}{k_B T} = \ln 2 \approx 0,7$ Ce qui est compatible avec la courbe.

Plus N est grand, plus il est probable d'avoir environ $\frac{N}{2}$ particules de chaque côté de la paroi. Les pressions seront presque identiques de chaque côté et le travail à fournir pour atteindre l'équilibre mécanique sera plus faible. La courbe est donc décroissante.

24. $\bar{W}_m$ est le même pour $N=1$ et $N=2$: $\bar{W}_m = k_B T \ln 2$

$N=1$: la particule est soit à gauche, soit à droite et le travail mesuré est $k_B T \ln 2$

$N=2$: On a une chance sur deux d'avoir une particule de chaque côté donc un travail du mécanisme nul.

Une fois sur 4, les deux particules sont à gauche et le travail du mécanisme vaut $2k_B T \ln 2$. Idem pour les deux particules à droite.

Le travail moyen vaut $2 \times \frac{1}{4} \times 2k_B T \ln 2 = k_B T \ln 2$ comme pour $N=1$

25. $\bar{N}_G = xN$ $\sigma = \sqrt{Nx(1-x)}$

26.
$$W_m(N_G) = k_B T \left[(N_G - \bar{N}_G + \bar{N}_G) \ln \left(\frac{N_G - \bar{N}_G + \bar{N}_G}{\bar{N}_G} \right) + (N - \bar{N}_G + \bar{N}_G - N_G) \ln \left(\frac{N - \bar{N}_G + \bar{N}_G - N_G}{N - \bar{N}_G} \right) \right]$$

$$= k_B T \left[(\bar{N}_G + \varepsilon) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\bar{N}_G} \right) + (N - \bar{N}_G - \varepsilon) \ln \left(1 - \frac{\varepsilon}{N - \bar{N}_G} \right) \right] \text{ avec } \varepsilon = N_G - \bar{N}_G$$

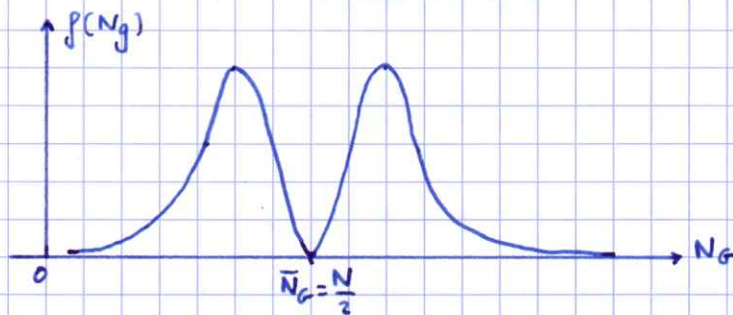
$$\approx k_B T \left[(\bar{N}_G + \varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{\bar{N}_G} - \frac{\varepsilon^2}{2\bar{N}_G^2} \right) + (N - \bar{N}_G - \varepsilon) \left(-\frac{\varepsilon}{N - \bar{N}_G} - \frac{\varepsilon^2}{2(N - \bar{N}_G)^2} \right) \right]$$

$$= k_B T \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2\bar{N}_G} + \frac{\varepsilon^2}{\bar{N}_G} - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{N - \bar{N}_G} - \frac{\varepsilon^2}{2(N - \bar{N}_G)} \right] \text{ à l'ordre 2 en } \varepsilon$$

$$= k_B T \left[\frac{\varepsilon^2}{2\bar{N}_G} + \frac{\varepsilon^2}{2(N - \bar{N}_G)} \right] = \frac{1}{2} k_B T \frac{N}{\bar{N}_G(N - \bar{N}_G)} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} k_B T \frac{N}{\bar{N}_G(N - \bar{N}_G)} (N_G - \bar{N}_G)^2$$

D'où:
$$f(N_G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{2} k_B T \frac{N}{\bar{N}_G(N - \bar{N}_G)} (N_G - \bar{N}_G)^2 \exp \left(-\frac{(N_G - \bar{N}_G)^2}{2\sigma^2} \right)$$

27. $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{N}_G = \frac{N}{2}$



Si $N_G = \frac{N}{2}$: $f(N_G) = 0 \Rightarrow$ le travail du mécanisme est nul car la pression est la même à gauche et à droite

Si $N_G \rightarrow 0$ ou $+\infty$: $f(N_G) = 0 \Rightarrow$ le travail est nul car la probabilité d'avoir $N_G \approx 0$ ou N_G grand est faible d'après la loi gaussienne

28. $\bar{W}_m = \sum_{N_G=0}^N f(N_G) \approx \int_0^{+\infty} f(N_G) dN_G$ en passant à une variable continue

$$= \int_0^{+\infty} C (N_G - \bar{N}_G)^2 e^{-\frac{(N_G - \bar{N}_G)^2}{2\sigma^2}} dN_G \quad \text{on pose } u = \frac{N_G - \bar{N}_G}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$= C \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 u^2 e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du$$

$$= C 2\sqrt{2}\sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{2} k_B T \cdot \frac{N}{\bar{N}_G(N - \bar{N}_G)} \cdot 2\sqrt{2}\sigma^3 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Finalement: $\bar{W}_m = \frac{1}{2} k_B T \cdot \frac{N\sigma^2}{\bar{N}_G(N - \bar{N}_G)}$ or: $\sigma^2 = Nx(1-x) = N \frac{\bar{N}_G}{N} (1 - \frac{\bar{N}_G}{N}) = \frac{\bar{N}_G(N - \bar{N}_G)}{N}$

Soit: $\boxed{\bar{W}_m = \frac{1}{2} k_B T}$ = énergie thermique associée à un degré de liberté

29. $\bar{W}_m$ indépendant de x

Quand $N \rightarrow +\infty$, le gaz devient un milieu continu homogène. La position x de la paroi n'intervient pas car la paroi est en équilibre pour tout x .