

① Les hypothèses de l'acoustique linéaire

1. La taille de la particule fluide doit être grande devant la dimension microscopique caractéristique (libre parcours moyen) et petite devant la dimension macroscopique caractéristique.

2. Il n'y a que quatre équations pour cinq inconnues: $\vec{v}$, p , ρ
De plus le terme non linéaire $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ rend la résolution compliquée.

3. Le terme (a) peut être linéarisé si: $|\delta \rho| \ll \rho_0$

$$4. \frac{\| \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \|}{\| \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \|} \approx \frac{\| \delta \vec{v} \|^2 \cdot \frac{1}{\lambda}}{\frac{\| \delta \vec{v} \|^2}{T}} = \| \delta \vec{v} \| \cdot \frac{T}{\lambda} = \frac{\| \delta \vec{v} \|}{c} \quad \text{car } \lambda = cT$$

On aura (b) négligeable devant (a) si: $\| \delta \vec{v} \| \ll c$

5. La seconde équation peut être linéarisée à nouveau si: $|\delta \rho| \ll \rho_0$

6. A nouveau si $|\delta \rho| \ll \rho_0$, on aura: $\chi_s \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \rho}{\delta p}$ relation linéaire entre δp et $\delta \rho$

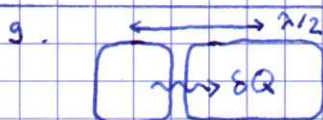
On a: $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{s0}}}$ Et aussi: $\delta p = c^2 \delta \rho$

7. $\rho \vec{g} - \nabla p = \rho_0 \vec{g} + \delta \rho \vec{g} - \nabla p_0 - \nabla \delta p$ or $\rho_0 \vec{g} - \nabla p_0 = \vec{0}$ (stat. que des fluides)

$$\frac{\| \delta \rho \vec{g} \|}{\| \nabla \delta p \|} = \frac{\delta \rho g}{\frac{1}{\lambda} \delta p} = cT \frac{\delta \rho g}{\delta p} \approx c \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{c^2} g = \frac{g}{c\omega} \ll 1 \quad \text{si } g \ll c\omega$$

8. $f \gg \frac{g}{c}$ A.N: air $f \gg 33 \text{ mHz}$ eau $f \gg 6,7 \text{ mHz}$

Ces conditions sont vérifiées pour le domaine audible [20 Hz - 20 kHz]



particule de fluide comprimée $\Rightarrow$ + chaude
particule de fluide détendue $\Rightarrow$ + froide

Le transfert thermique δQ par diffusion se fait en un temps: $\tau \approx \frac{\lambda^2}{D}$

Evolution adiabatique si les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire: $\tau \gg T$ (T : période de l'onde sonore)

$$\Rightarrow \frac{c^2 T^2}{D} \gg T$$

Donc: $\frac{c^2 \cdot 2\pi}{\omega D} \gg 1$ Soit finalement: $\omega \ll \frac{c^2}{D}$

10. $f \ll \frac{c^2}{D}$ A.N: air $f \ll 4,5 \text{ GHz}$ eau $f \ll 15 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$

Ces conditions sont largement vérifiées

11. Le terme supplémentaire de viscosité est $\eta \Delta \vec{v}$

$$\frac{\| \eta \Delta \vec{v} \|}{\| \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \|} \sim \frac{\eta \frac{v}{\lambda^2}}{\rho_0 \frac{v}{T}} = \frac{\eta T}{\rho_0 c^2 T^2} \sim \frac{\eta}{\rho_0 c^2 T} \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{c^2}{\eta}$$

12. $f \ll \frac{c^2}{\eta}$ A.N: air $f \ll 9 \text{ GHz}$ eau $f \ll 2,2 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$

Ces conditions sont largement vérifiées

13. Pour remplacer c par $c(z)$, il faut que ses variations en fonction de z ne soit pas trop forte à l'échelle de la longueur d'onde, soit:

$$l \gg \lambda$$

② Acoustique géométrique

14. Pour un gaz parfait: $p = \frac{MP}{RT} \Rightarrow p_0 = \frac{MP_0}{RT}$

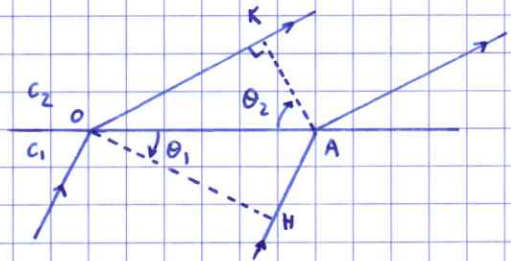
Loi de Laplace pour une évolution isentropique: $p e^{-\gamma} = \text{cte}$

On dérive par rapport à p : $e^{-\gamma} + p \cdot (-\gamma) e^{-\gamma-1} \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dp}{p} \Rightarrow \chi_{so} = \frac{1}{\gamma-1}$

Donc: $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_{so}} = \frac{RT}{M p_0} \gamma p_0$ Finalement: $c^2 = \frac{\gamma RT}{M}$

Pour accéder à γ , il faut savoir si le gaz est monoatomique, diatomique, ...
L'air est diatomique: $\gamma = \frac{7}{5}$ car $C_{p,m} = \frac{7}{2}R$ et $C_{v,m} = \frac{5}{2}R$

15. Les points O et H appartiennent au même plan de phase $\mathcal{C}_1$
Les points A et K appartiennent au même plan de phase $\mathcal{C}_2$
 $\Rightarrow \mathcal{C}(K) - \mathcal{C}(O) = \mathcal{C}(A) - \mathcal{C}(H)$
 $\Rightarrow t_{OK} = t_{HA}$ (temps de parcours identiques)
 $\Rightarrow \frac{t_{OK}}{c_2} = \frac{t_{HA}}{c_1}$



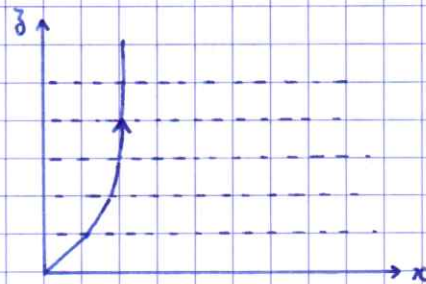
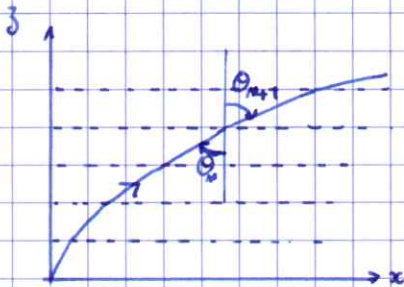
or: $OK = OA \sin \theta_2$ Donc: $\frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_1}{c_1}$
 $HA = OA \sin \theta_1$

16. Il s'agit de l'analogue de la loi de Descartes de la réfraction.

17. D'après la ligne 105 de l'énoncé, la condition est: $e \gg \lambda$

18. Entre la couche m et la couche $m+1$, on a: $\frac{\sin \theta_m}{c_m} = \frac{\sin \theta_{m+1}}{c_{m+1}}$

• $T_{m+1} > T_m \Rightarrow c_{m+1} > c_m$ (d'après 14) • $T_{m+1} < T_m \Rightarrow c_{m+1} < c_m$
 $\Rightarrow \theta_{m+1} > \theta_m$ $\Rightarrow \theta_{m+1} < \theta_m$

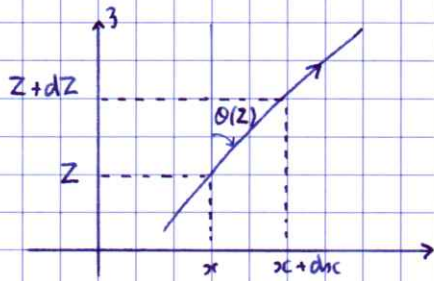


19. On a conservation du produit $\frac{\sin \theta}{c}$, donc: $\frac{\sin \theta_m}{c_m} = \frac{\sin \theta_1}{c_1}$

20. Le milieu continu est l'analogue du milieu stratifié avec $dz = e$

La condition de la question 17 est alors: $dz \gg \lambda$ soit: $dz \gg \frac{c}{\omega}$

21. En généralisant la relation de la question 19 à un milieu continu: $\frac{\sin \theta(z)}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0}$
soit: $m(z) \sin \theta(z) = m_0 \sin \theta_0 = \text{constante } A$



$$\text{On a : } \sin \theta(z) = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$\text{Donc : } \frac{m(z)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = A \Rightarrow \frac{m(z)^2}{A^2} = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

où : $A = m_0 \sin \theta_0$

$$22. \quad m(z) = \frac{1}{c(z)} = \frac{1}{\sqrt{8RT_0(z)}} \quad \text{et} \quad m_0 = \frac{1}{\sqrt{8RT_0(0)}} \Rightarrow \frac{m(z)}{m_0} = \sqrt{\frac{T_0(0)}{T_0(z)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha z}}$$

$$(5) \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta_0 (1 + 2\alpha z)} = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta_0} (1 - 2\alpha z) = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \quad \text{car } |\alpha z| \ll 1$$

$$\text{On dérive par rapport à } x : -\frac{2\alpha}{\sin^2 \theta_0} \frac{dz}{dx} = 2 \frac{dz}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\sin^2 \theta_0}$$

$$\text{Solution : } Z(x) = -\frac{\alpha}{2\sin^2 \theta_0} x^2 + \alpha x + \beta$$

$$\text{conditions initiales : } Z(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\tan \theta_0 = \left(\frac{dx}{dz}\right)_0 \Rightarrow \frac{dz}{dx}(0) = \frac{1}{\tan \theta_0} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\tan \theta_0}$$

$$\text{Donc : } Z(x) = -\frac{\alpha}{2\sin^2 \theta_0} x^2 + \frac{1}{\tan \theta_0} x$$

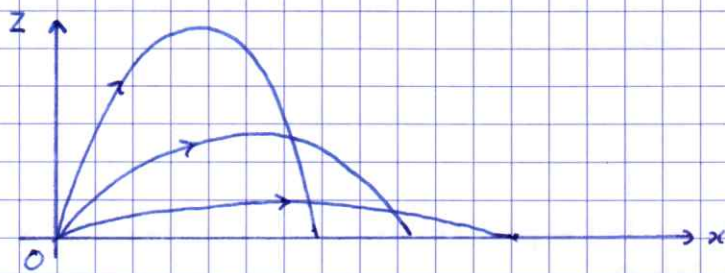
$$23. \quad \text{On a alors : } \frac{W}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2\sin^2 \theta_0} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\tan \theta_0} \frac{x}{\alpha}$$

$$\Rightarrow W(x) = -\frac{1}{2\sin^2 \theta_0} x^2 + \frac{1}{\tan \theta_0} x$$

$$B(\theta_0) = -\frac{1}{2\sin^2 \theta_0}$$

$$C(\theta_0) = \frac{1}{\tan \theta_0}$$

24. Réseau de paraboles avec la concavité vers le bas car $B(\theta_0) < 0$

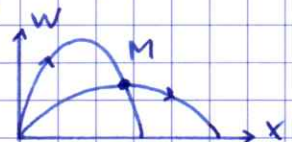


$$25. \quad \text{On réécrit l'équation de la trajectoire avec : } v_0 = \frac{1}{\tan \theta_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^2 \theta_0} = 1 + \cot^2 \theta_0 = 1 + v_0^2$$

$$\text{Donc : } W(x) = -\frac{1}{2}(1 + v_0^2)x^2 + v_0 x$$

$$\text{Ou encore : } \frac{x^2}{2} v_0^2 - x v_0 + (W + \frac{x^2}{2}) = 0 \quad \text{équation du 2}^\circ \text{ degré en } v_0$$

$\Delta > 0$: 2 solutions pour $v_0 \rightarrow$ le point $M(x, W)$ peut être atteint avec deux valeurs de θ_0 différentes

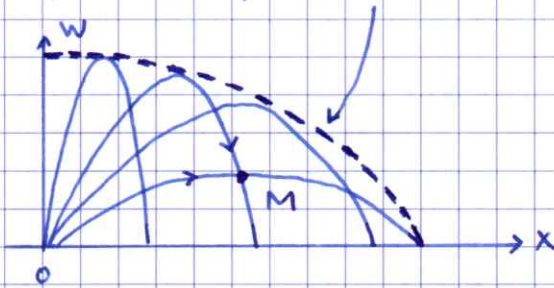


$\Delta < 0$: pas de solution pour $v_0 \rightarrow$ le point $M(x, W)$ ne peut être atteint, quel que soit l'angle initial θ_0

$$\text{La frontière entre les deux régions correspond donc à } \Delta = 0 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} (W + \frac{x^2}{2}) = 0$$

$$\text{L'équation de la frontière est alors : } W = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

Il s'agit de l'équation de la parabole de sûreté



26. Un point M du domaine $\mathcal{D}_1$ peut être atteint par deux rayons acoustiques issus de la source $\Rightarrow$ interférences au niveau du récepteur.

27. Analogie avec une trajectoire parabolique de chute libre dans $\vec{g}$

28. problème 1: le réflecteur doit être dans la région $\mathcal{D}_1$ pour être atteint par le rayon
problème 2: le signal réfléchi peut lui aussi emprunter deux rayons pour revenir vers la source $\rightarrow$ deux temps de parcours différents
 $\rightarrow$ incertitude sur la position du réflecteur

29. On cherche $Z_{\max}$: $\frac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{\sin^2 \theta_0} x + \frac{1}{\tan \theta_0} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{\alpha}$

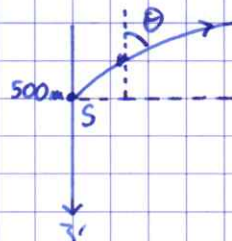
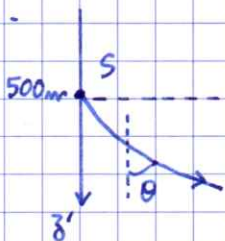
En reportant dans l'équation de la trajectoire: $Z_{\max} = \frac{\cos^2 \theta_0}{2\alpha}$

Pour un gaz parfait, on avait: $c(z) = \sqrt{\frac{8RT_0(z)}{M}} = c(0) \sqrt{1 + 2\alpha z} \approx c(0)(1 + \alpha z)$

Ici, en surface, on a bien $c(z)$ fonction affine de z : $c(0) \approx 1510 \text{ ms}^{-1}$
 $\frac{dc}{dz} \approx \frac{2}{150} = c(0)\alpha \Rightarrow \alpha \approx 10^{-5} \text{ m}^{-1}$

Pour $\theta_0 = 0$, on calcule alors: $Z_{\max} = 50000 \text{ m}$. On peut donc aller au delà du chenal de surface.

30. On doit avoir: $\frac{\sin \theta(z')}{c(z')} = \text{cte}$
 $c \nearrow \text{si } z' \uparrow$
 $\Rightarrow \sin \theta \uparrow$
 $\Rightarrow \theta \uparrow$



On doit avoir: $\frac{\sin \theta(z')}{c(z')} = \text{cte}$
 $c \nearrow \text{si } z' \downarrow$
 $\Rightarrow \sin \theta \uparrow$
 $\Rightarrow \theta \uparrow$

Dans les deux cas, la concavité de la trajectoire du rayon acoustique est dirigée vers l'horizontale à la profondeur 500 m

Cela donne une trajectoire du type:



31. Analogie en optique: fibre optique à gradient d'indice

32. Le bruit émis par le sous-marin ne remonte pas à la surface. Il n'est pas détectable.