

Exercices pour la rentrée.

Tous ces exercices doivent être faits pour la rentrée. Ce sont des calculs qui feront partie de ce qui sera élémentaire dès la rentrée.

Il ne s'agit pas de prendre une calculatrice pour le faire le plus vite possible, mais bien d'intégrer les techniques utilisées, et d'apprendre à faire soit de tête, soit avec un crayon, quelques calculs simples. Les calculatrices sont interdites aux concours.

Réfléchissez bien avant de faire des calculs : il faut parfois factoriser avant de calculer, simplifier une fraction avant de continuer.

Les identités remarquables suivantes doivent être connues par cœur :

1. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

2. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

3. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

4. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

5. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Rappels lycée

Exercice 1 Calculs à faire très rapidement :

1. $(2, 5 \times 6, 7) + (2, 5 \times 3, 3)$

2. $(9 \times (4 + \frac{2}{3})) + (9 \times (5 + \frac{1}{3}))$

3. $(5, 2 \times 5, 6) + (5, 2 \times 4, 4)$

4. $(12 \times (3 + \frac{3}{4})) + (12 \times (6 + \frac{1}{4}))$

5. $(0, 54 \times 80, 5) + (0, 54 \times 19, 5)$

6. $(11 \times (9 + \frac{6}{5})) - (11 \times (9 - \frac{1}{5}))$

7. $(8, 6 \times 71, 9) + (8, 6 \times 28, 1)$

8. $(6 \times (97 + \frac{7}{4})) + (6 \times (1 + \frac{1}{4}))$

9. $(1, 63 \times 51, 5) + (1, 63 \times 48, 5)$

10. $(8 \times (2 + \frac{5}{3})) + (8 \times (4 + \frac{7}{3}))$

11. $7, 9^2 - 2, 1^2.$

Exercice 2 Réduire au même dénominateur :

1. $\frac{1}{7} - \frac{2}{5}$

2. $\frac{2}{3} + \frac{18}{7}$

3. $\frac{3}{21} - \frac{4}{9}$

4. $\frac{7}{25} + \frac{3}{12} - \frac{1}{20}$

5. $\frac{1}{30} - \frac{5}{42} + \frac{7}{15}$

Exercice 3 Quelques calculs élémentaires à faire rapidement :

1. $\frac{8}{6} - \frac{9}{4}$

2. $(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}})$

3. $(-1) - (-2) + 3 - (-1)$

4. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$

5. $\frac{3}{7} \times (\frac{11}{3} + \frac{16}{5}) - (\frac{3}{7} + \frac{11}{3}) \times \frac{16}{5}$

6. $\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}$

7. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

8. $\frac{\sqrt{20}-3\sqrt{5}}{\sqrt{8}\sqrt{10}-5}$

9. $(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

10. $(1 + \sqrt{\frac{31}{3}})^3 + (1 - \sqrt{\frac{31}{3}})^3$

Exercice 4 Quelques développements élémentaires :

1. $(a - b)^3$
2. $(3a + b^2 + c)^2$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2$
4. $(a + \frac{1}{a})^2$
5. $((a + b)^2)^2$
6. $(a - \frac{1}{a})^3$
7. $(b + c)^4$
8. $(a + \frac{1}{a})^4$
9. $(a - b\sqrt{2})^2(a + b\sqrt{2})^2$
10. $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^4$

Exercice 5 Quelques simplifications élémentaires :

1. $2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$
2. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$
3. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}}$
4. $(a - 3)(b + c) - (ac + 2b)$
5. $(a - b)(a - 2c) + (b - c)(a - 2)$
6. $(b^2 - a)^2 - a(2b^2 - a)$
7. $c(1 - a)(1 - b) + b(1 - a)(1 - c) + b(1 - a)(1 - c)$
8. $a^2c + (a - b)(b - c)(a + b)$
9. $(a - b + c)^2 - (-a - b + c)^2 + (a + b + c)^2$
10. $(3a + 2)^2 - (4a + b)(2a - 1)$
11. $(ab + ac + bc)(a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)(b - c)$
12. $-3 + a(1 + a(2 + b(-1 + a)))$

Exercice 6 (Factorisations) Factorisez les expressions suivantes, où $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

1. $2a^2 - 2ba$
2. $4x^4 - 16y^4$
3. $16x^4 + 256 - 128x^2$
4. $-49x^3 - 9xy^2 + 42x^2y$
5. $2x^3 - 12x^2 - 54x$
6. $-48x^3 + 48x^2 - 12x$
7. $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{9}xy^2 + \frac{1}{3}x^2y$
8. $-4x^9y + 4x^4y^6 - x^8y + x^3y^6$
9. $7a^4 + 28a - 14a^3b - 56b$
10. $8x^2y - 4x - 6xy^2 + 3y$
11. $15ax + 6ay - 5bx - 2by$
12. $20a^3b^2 + 12a^4b - 10a^2b - 6a^3$
13. $3a^2x - 4a^2y^2 - 3bx + 4by^2$

Exercice 7 Factorisez et déterminez le signe des expressions suivantes :

1. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$
2. $x^5 + x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 9x + 9$
3. $x \ln(x) - x - 2 \ln(x) + 2$
4. $x + 8 - \frac{16}{x-7}$
5. $xe^x + 3e^x - 2x - 6$

Exercice 8 (Réduction au même dénominateur) Réduire au même dénominateur les expressions suivantes, où $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{7}{x-1}$
2. $\frac{x-2}{x^2-5x+6} + \frac{x+1}{x-2}$
3. $\frac{7}{a^2-b^2} + \frac{2}{a^2-ab} - \frac{5}{ab-b^2}$
4. $\frac{a-b}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{3a^2+6ab+3b^2} - \frac{ab}{a^2b+ab^2}$
5. $\frac{1}{9a^2-9b^2} + \frac{1}{9(a+b)}$
6. $\frac{x}{2x-y} + \frac{y}{y^2+4x^2-4xy}$
7. $\frac{2x+7y}{(x-y)(2x+3y)} - \frac{4}{(x-y)(3x-y)}$
8. $\frac{4ab}{(a^2x+b)(x-a)} - \frac{a-b}{(4a+7)(a^2x+b)} + \frac{3}{(a^2x+b)(3x-3y)}$
9. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2}$

$$10. \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2}$$

$$11. \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}}$$

$$12. \frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$13. \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}}$$