

Chapitre 3

Trigonométrie

1 Congruences

Définition 1.1 (Congruences)

Soient $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Les réels a et b sont congrus modulo α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = k\alpha$. On note alors $a \equiv b \pmod{\alpha}$.

Exemples.

1. $\frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
2. $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{\pi}{6}}$.

Remarque.

On obtient facilement l'ensemble des réels congrus à un réel donné : si $a, \alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\{x, x \equiv a \pmod{\alpha}\} = \{a + k\alpha, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a - 2\alpha, a - \alpha, a, a + \alpha, a + 2\alpha, \dots\}.$$

Par exemple, on peut déterminer les ensembles suivants :

$$x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{\pi}{6}}, \quad x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{3}}, \quad x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{\frac{3\pi}{2}}.$$

Méthode 1.2 (Congruences et cercle trigonométrique)

Pour placer sur un cercle trigonométrique des valeurs x vérifiant une relation du type $x \equiv a \pmod{r\pi}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on place a , puis on ajoute $r\pi$, puis $2r\pi$, etc., jusqu'à ce qu'on retombe sur a , mais modulo 2π seulement. Placez par exemple :

$$x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{\pi}{6}}, \quad x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{3}}, \quad x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{\frac{3\pi}{2}}.$$

Proposition 1.3

Soient $a, b, a', b', t, \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \equiv b \pmod{\alpha}$ et $a' \equiv b' \pmod{\alpha}$, alors $a + a' \equiv b + b' \pmod{\alpha}$.
2. Si $a \equiv b \pmod{\alpha}$, alors $ta \equiv tb \pmod{t\alpha}$.
3. Si $a \equiv b \pmod{\alpha}$ et $t \neq 0$, alors $a/t \equiv b/t \pmod{\alpha/t}$.

Remarque.

ATTENTION : On ne peut pas multiplier les congruences entre elles ! Si $a \equiv b \pmod{\alpha}$ et $a' \equiv b' \pmod{\alpha}$, en général, $aa' \not\equiv bb' \pmod{\alpha}$.

Exemple.

Si $\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, alors $x \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Méthode 1.4

Pour résoudre une équation avec des congruences, on utilise la proposition 1.3 pour arriver à une valeur de l'inconnue modulo un réel. Par exemple, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{2x}{3} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{\frac{3\pi}{2}},$$

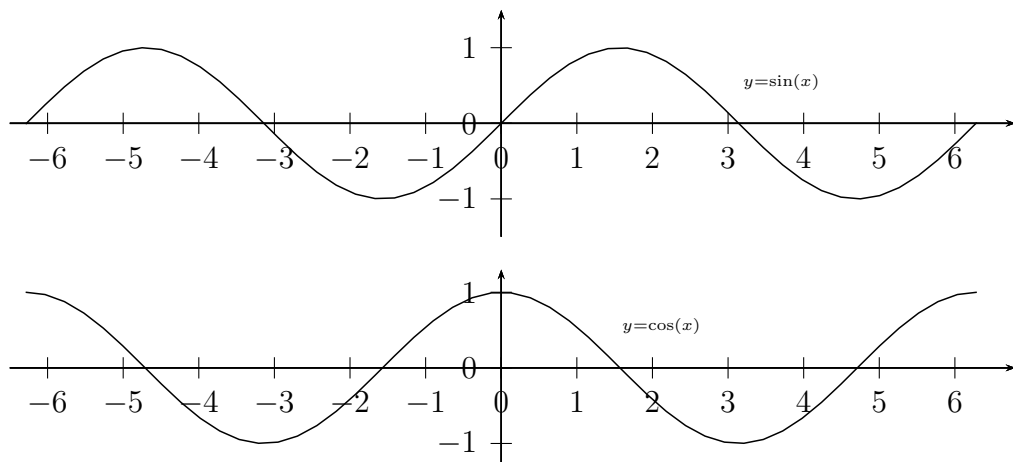
et l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{3\pi}{4} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \dots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots \right\}.$$

2 Fonctions sinus et cosinus

2.1 Définitions

Voici les graphes de ces fonctions :



Voici quelques valeurs remarquables, qu'il est essentiel de savoir placer sur un cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2.2 Formules de trigonométrie

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \cos(x + 2\pi) &= \cos(x), & \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \\
 \cos(-x) &= \cos(x), & \sin(-x) &= -\sin(x) \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x), \\
 \cos(\pi - x) &= -\cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x), \\
 \cos(\pi + x) &= -\cos(x), & \sin(\pi + x) &= -\sin(x), \\
 \cos'(x) &= -\sin(x), & \sin'(x) &= \cos(x).
 \end{aligned}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
 \sin^2(a) + \cos^2(a) &= 1, & \sin^2(a) &= \frac{1 - \cos(2a)}{2}, & \cos^2(a) &= \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \\
 \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a), & \cos(2a) &= 2 \cos^2(a) - 1 = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2 \sin^2(a).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), & \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \\
 \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a), & \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \cos(a) - \cos(b) &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right), \\
 \sin(a) + \sin(b) &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \sin(a) - \sin(b) &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).
 \end{aligned}$$

2.3 Propriétés et équations

Proposition 2.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leq |x|$.

Proposition 2.2 (Équations élémentaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \left(a \equiv b \pmod{2\pi} \text{ ou } a \equiv \pi - b \pmod{2\pi} \right), \quad (1)$$

$$\cos(a) = \cos(b) \iff \left(a \equiv b \pmod{2\pi} \text{ ou } a \equiv -b \pmod{2\pi} \right), \quad (2)$$

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b) \\ \sin(a) = \sin(b) \end{cases} \iff a \equiv b \pmod{2\pi}. \quad (3)$$

Théorème 2.3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Remarque.

On peut remplacer l'intervalle $[0, 2\pi[$ par n'importe quel intervalle semi-ouvert de longueur 2π , comme par exemple $]-\pi, \pi]$.

Proposition 2.4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il existe $R \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = R \cos(x - \varphi).$$

Remarque.

On peut bien entendu obtenir $R \cos(x + \varphi_1)$ ou $R \sin(x - \varphi_2)$ ou $R \sin(x + \varphi_3)$.

Méthode 2.5

Pour déterminer R et φ , on procède exactement comme dans la démonstration.

Méthode 2.6 (Résolution d'équations/inéquations)

- Pour résoudre une équation du type $\sin(tx) = a$ ou $\cos(tx) = a$, $x, t, a \in \mathbb{R}$:
 - On vérifie tout d'abord que $a \in [-1, 1]$ (sinon, il n'y a aucune solution).
 - On écrit $a = \sin(\alpha)$ ou $a = \cos(\alpha)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.
 - On termine alors la résolution avec la proposition 2.2, en exprimant l'ensemble des solutions en fonction de α . Utilisez le cercle trigonométrique !
- Pour résoudre les inéquations trigonométriques (**attention à la rigueur** : " $<$ " et " $\leq$ ", ce n'est pas pareil)

$$\begin{aligned} \sin(x) < a, \quad \sin(x) > a, \quad \sin(x) \leq a, \quad \sin(x) \geq a, \\ \cos(x) < a, \quad \cos(x) > a, \quad \cos(x) \leq a, \quad \cos(x) \geq a \end{aligned}$$

Si $a \notin [-1, 1]$, l'ensemble des solutions est soit $\mathbb{R}$, soit $\emptyset$. Sinon, on procède ainsi :

- Si $a \in [-1, 1]$, on écrit que $a = \sin(\alpha)$ ou $a = \cos(\alpha)$.
 - On résout l'inéquation sur un intervalle de longueur 2π bien choisi (suivant les cas, $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ ou $[\alpha - 2\pi, \alpha]$).
 - On donne l'ensemble des solutions par 2π -périodicité.
3. Pour résoudre les inéquations trigonométriques (**attention à la rigueur** : " $<$ " et " $\leq$ ", ce n'est pas pareil)

$$\begin{aligned} \sin(ux + v) < a, \quad \sin(ux + v) > a, \quad \sin(ux + v) \leq a, \quad \sin(ux + v) \geq a, \\ \cos(ux + v) < a, \quad \cos(ux + v) > a, \quad \cos(ux + v) \leq a, \quad \cos(ux + v) \geq a \end{aligned}$$

avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $u \neq 0$.

On procède ainsi :

- On pose $t = ux + v$ et on résout l'inégalité avec cette variable t comme le cas 2.
- On détermine les $x \in \mathbb{R}$ tels que $ux + v$ soit dans l'ensemble de solutions obtenu précédemment. Cela donne l'ensemble des solutions recherché.

Exemples.

1. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(x/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(2x/5) = \frac{7}{10}$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
2. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) < \frac{1}{2}$, $\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(x/7) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(3x/5) > \frac{7}{10}$, $\sin(x) < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3 Fonction tangente

3.1 Définition

Définition 3.1 (Fonction tangente)

La fonction tangente, notée $\tan$, est la fonction à valeurs réelles, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque.

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. La fonction tangente est donc bien définie en tout réel non congru à $\pi/2$ modulo π .

Voici quelques valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind.

Méthode 3.2 (Tangente et cercle trigonométrique)

Pour déterminer la tangente d'un angle θ à l'aide du cercle trigonométrique, on trace la droite d'équation $x = 1$, que l'on oriente vers le haut, l'origine étant le point de coordonnées $(1, 0)$. La distance algébrique du point d'intersection de cette droite avec le rayon d'angle θ .

Remarque.

Soit dans un repère orthonormal du plan une droite D d'équation $y = px + m$. Le coefficient directeur p (la pente de la droite) est la tangente de l'angle (orienté) formé par l'axe des abscisses et la droite D .

Proposition 3.3

La fonction tangente est impaire et π -périodique.

Proposition 3.4

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition, et on a

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Proposition 3.5 (Limites)

On a

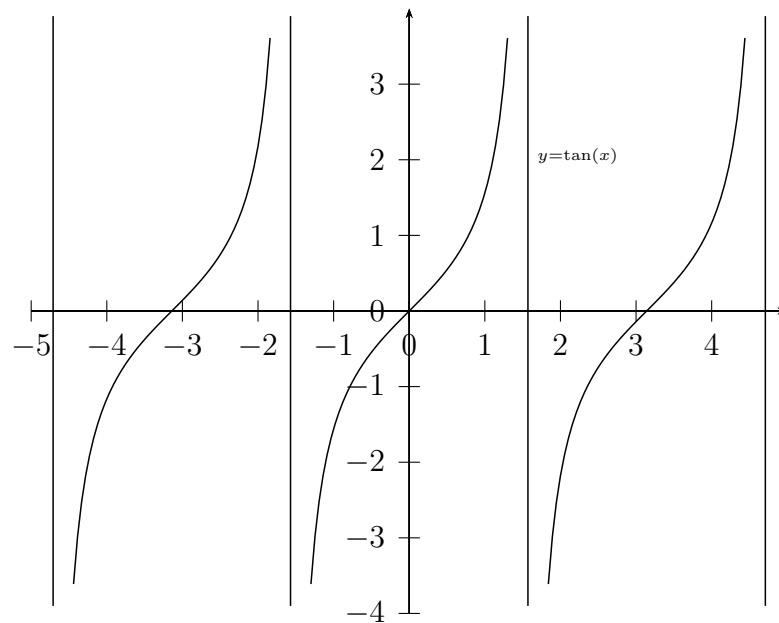
$$\begin{array}{ll} \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} +\infty & \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\infty \\ \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} -\infty & \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} +\infty \end{array}$$

Remarque.

On en déduit, par π -périodicité, les limites de $\tan$ en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, par valeurs supérieures et inférieures :

$$\begin{array}{ll} \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} +\infty & \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} -\infty \\ \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} -\infty & \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} +\infty \end{array}$$

Voici le graphe de la fonction tangente (on notera les asymptotes verticales d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) :



3.2 Formules de trigonométrie pour la tangente

Proposition 3.6

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Alors

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Proposition 3.7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\pi/2$ modulo π . Alors

$$a + b \equiv \pi/2 \pmod{\pi} \iff \tan(a) \tan(b) = 1.$$

Proposition 3.8 (Formule d'addition pour la tangente)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\pi/2$ modulo π . Si $a + b \not\equiv \pi/2 \pmod{\pi}$, on a

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)},$$

et si $a - b \not\equiv \pi/2 \pmod{\pi}$, on a

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}.$$

Proposition 3.9 (Tangente de l'angle moitié)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$. Soit

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Alors $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, et si $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Proposition 3.10 (Équations élémentaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Alors

$$\tan(a) = \tan(b) \iff a \equiv b \pmod{\pi}.$$

Voici quelques cas particuliers : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\tan(x) = 0 \iff x \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\tan(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$

$$\tan(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}.$$

Méthode 3.11

Les résolutions d'équations et d'inéquations du type $\tan(x) = a$ ou $\tan(x) < a$ se résolvent en écrivant que $a = \tan(\alpha)$ (ceci est toujours possible : la droite d'équation $y = a$ coupe la courbe représentative de la fonction tangente). Pour une équation, on conclut avec la proposition 3.10, et pour les inéquations, on se sert du cercle trigonométrique.

Exemples.

1. Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ $\tan(x) = \sqrt{3}$ et $\tan(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ $\tan(x) < \sqrt{3}$ et $\tan(x/5) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$.