Chapitre 4

Les nombres complexes

Voici quelques rappels du cours de terminale :

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, *i.e.* des éléments de la forme

$$a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},$$

où i est un élément qui vérifie $i^2 = -1$.

2. Si $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, on a

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

3. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, le réel a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

4. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies par

$$\forall\, a, b, a', b' \in \mathbb{R},\ (a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b'), \qquad (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b).$$

Elles sont associatives et commutatives, et la multiplication est distributive sur l'addition.

5. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des *imaginaires pures*, *i.e.* l'ensemble des nombres complexes de partie réelle nulle.

6. On rappelle que lorsque le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal, on peut identifié $\mathbb{C}$ à $\mathcal{P}$ en associant à tout point M de coordonnées (a, b) son affixe $a + ib$.

Remarque.

Attention : l'équivalence du point 2 n'est vraie que si a, a', b, b' sont des réels. Par exemple si $a = 1$, $b = i$, $a' = b' = 0$, on a $a + ib = a' + ib'$, mais $a \neq a'$ et $b \neq b'$.

Proposition 0.1 (Rappels)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.
2. $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$.

Remarque.
Attention : le point 2 de la proposition 0.1 est faux si λ n'est pas un réel.

1 Définitions

1.1 Conjugué et module

Définition 1.1 (Conjugué et module)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le *conjugué* de z par

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z),$$

et le module de z par

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Proposition 1.2 (Conjugué d'une somme, d'un produit)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

1. $|z| = |\overline{z}|$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
4. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
5. $\overline{\overline{z}} = z$.
6. Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
7. Si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

Proposition 1.3 (Partie réelle et imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

1. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
2. $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
3. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
4. $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

Proposition 1.4 (Module d'un produit)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$ où $|\lambda|$ est la valeur absolue de λ.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$

Proposition 1.5 (Module et inverse)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

1. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
2. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
3. Si $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.

Méthode 1.6 (Calcul d'un module en factorisant un réel positif)

Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et $z = \lambda a + i\lambda b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), on a $|z| = \lambda\sqrt{a^2+b^2}$. On ne fait **pas** le calcul $\sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2}$.

1.2 Inégalité triangulaire

Proposition 1.7

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|, \qquad |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|\,.$$

Proposition 1.8 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Remarque.

Rappelons que si $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|a| \leqslant b$ si et seulement si $a \leqslant b$ et $-a \leqslant b$.

Corollaire 1.9

Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, on a

$$|z - z''| \leqslant |z - z'| + |z' - z''|,$$
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|.$$

Corollaire 1.10 (Inégalité triangulaire généralisée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2 Argument d'un nombre complexe

2.1 Nombres complexes de module 1

Définition 2.1

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, *i.e.*

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Proposition 2.2

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z \in \mathcal{U}$ si et seulement si $z \neq 0$ et $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Définition 2.3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit $e^{i\theta}$ par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathcal{U}.$$

Proposition 2.4

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$1 = e^{2ik\pi}, \qquad -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}, \qquad i = e^{i(\pi/2+2k\pi)}, \qquad -i = e^{i(-\pi/2+2k\pi)}.$$

En particulier :

$$1 = e^{0}, \qquad -1 = e^{i\pi}, \qquad i = e^{i\pi/2}, \qquad -i = e^{-i\pi/2}.$$

Proposition 2.5

Soit $z \in \mathcal{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = e^{i\theta},$$

ou encore

$$\mathcal{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 2.6

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$$

Remarques.

1. On définit alors $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$.
2. La première formule permet de retrouver rapidement les formules du cosinus et sinus de la somme de deux angles.

Proposition 2.7 (Résolution d'équations)

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \mod 2\pi,$$

et plus généralement,

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \mod 2\pi.$$

Proposition 2.8 (Formule de Moivre)

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},$$

ou encore

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Proposition 2.9 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.2 Argument

Définition 2.10 (Argument, forme trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Un *argument* de z est un réel θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

On note $\arg(z) \equiv \theta \mod 2\pi$.

2. Si θ est un argument de z, l'écriture

$$z = |z|e^{i\theta}$$

est l'écriture exponentielle de z.

Remarque.

0 n'a pas d'argument.

Proposition 2.11

Si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$, alors les arguments de z sont $\theta + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Deux arguments de z diffèrent donc d'un multiple de 2π.

Définition 2.12 (Argument principal)

L'argument principal de $z \in \mathbb{C}^*$ est l'unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Proposition 2.13

Soient $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.

1. On a $\arg(z) \equiv \theta \mod \pi$ et $|z| = |r|$.

2. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est la forme trigonométrique de z si et seulement si $r \in \mathbb{R}_+^*$, et alors $\arg(z) \equiv \theta \mod 2\pi$.

3. Si $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $-re^{i(\theta+\pi)}$, et $\arg(z) \equiv \theta + \pi \mod 2\pi$.

Méthode 2.14 (Calculer un argument)

— Si $z = a + ib$ est sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$), on calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors

$$\frac{z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et on détermine θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(on peut s'aider du cercle trigonométrique).

— Si $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on utilise la proposition 2.13, en faisant attention au signe de r.

Méthode 2.15 (Module et argument de $e^{ia} \pm e^{ib}$)

Voici des calculs qu'il faut savoir mener correctement. Ils sont très importants.

1. On commence par deux cas particuliers. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) On a

$$e^{ia} + 1 = e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}},$$

donc

$$|e^{ia} + 1| = 2\left|\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right| \quad \text{et} \quad \arg(e^{ia}+1) \equiv \begin{cases} \frac{a}{2} \mod 2\pi & \text{si } \cos(a/2) > 0, \\ \frac{a}{2} + \pi \mod 2\pi & \text{si } \cos(a/2) < 0. \end{cases}$$

(b) De même

$$e^{ia} - 1 = e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{i\frac{a}{2}} - e^{-i\frac{a}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}} = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}\right)},$$

donc

$$|e^{ia} - 1| = 2\left|\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right| \quad \text{et} \quad \arg(e^{ia}-1) \equiv \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi & \text{si } \sin(a/2) > 0, \\ \frac{a}{2} - \frac{\pi}{2} \mod 2\pi & \text{si } \sin(a/2) < 0. \end{cases}$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

— On a

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}},$$

donc

$$|e^{ia} + e^{ib}| = 2\left|\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right| \quad \text{et} \quad \arg(e^{ia}+e^{ib}) \equiv \begin{cases} \frac{a+b}{2} \mod 2\pi & \text{si } \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0, \\ \frac{a+b}{2} + \pi \mod 2\pi & \text{si } \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

— De même, on a

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{\pi}{2}\right)},$$

donc

$$|e^{ia} - e^{ib}| = 2\left|\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right| \quad \text{et} \quad \arg(e^{ia} - e^{ib}) \equiv \begin{cases} \frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi & \text{si } \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0, \\ \frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{2} \mod 2\pi & \text{si } \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

On peut remarquer que ce deuxième cas s'obtient à partir du premier en remplaçant b par $b+\pi$, car $-e^{ib} = e^{i(b+\pi)}$.

Proposition 2.16 (Opération sur les arguments)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi], \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi], \qquad \arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi],$$

avec $0^0 = 1$.

Proposition 2.17 (Résolution d'équations)

1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$z = z' \iff |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(z') \mod 2\pi.$$

2. Soient $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \mod 2\pi \end{cases}$$

3 Application à la trigonométrie

On a déjà vu que certaines formules exponentielles permettent de retrouver les formules trigonométriques usuelles (prop 2.6). On va maintenant utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour

1. **linéariser** des formules trigonométrique, *i.e.* les écrire sans puissances de sinus ou de cosinus, mais comme somme de $\cos(kx)$ et/ou $\sin(kx)$.

2. exprimer les cosinus et sinus de multiple d'un angle en fonction de cet angle, par exemple $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

Méthode 3.1 (Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$)

Si $x \in \mathbb{R}$, on exprime $\cos(x)$ et $\sin(x)$ à l'aide des formules d'Euler. On développe alors un produit d'exponentielles, que l'on regroupe par puissances opposées pour faire apparaître des cosinus et sinus par la formule d'Euler. On a par exemple

$$\sin(x)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{i}{8}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}\right) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

On va maintenant linéariser $\cos^3(x)\sin^4(x)$ de trois façons différentes. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

— On écrit que

$$\cos^3(x)\sin^4(x) = \big(\cos(x)\sin(x)\big)^3\sin(x) = \frac{1}{2^3}\big(\sin^3(2x)\big)\sin(x)$$
$$= \frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{i2x}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right),$$

et on développe. Cette méthode est la plus efficace, car elle réduit le nombre de calculs dans le produit du développement des formules d'Euler.

— On écrit que

$$\cos^3(x)\sin^4(x) = \cos^3(x)\big(1-\cos^2(x)\big)^2 = \cos^3(x) - 2\cos^5(x) + \cos^7(x),$$

ce qui revient à ajouter des linéarisations de puissances de cosinus. Ne sert que si la puissance du sinus est paire. Permet d'éviter le produit des développement des formules d'Euler.

— La méthode la plus classique :

$$\cos^3(x)\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4,$$

et on développe.

Faîtes les calculs avec $\cos^3(x)\sin^5(x)$. Ce genre de calcul est utile pour calculer des primitives.

Méthode 3.2 (Expression de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$)

Il s'agit ici d'utiliser la formule de Moivre, puis de comparer les parties réelles et imaginaires après développement. Par exemple, on a

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x)+i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x),$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\\ \sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = (4\cos^2(x)-1)\sin(x).\end{aligned}$$

Méthode 3.3 (Calcul d'une somme de cosinus/sinus)

On considère un réel x et un entier $n>0$. On veut calculer par exemple $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$. On écrit que S est la partie réelle d'une somme d'exponentielles : $S = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$. On calcule donc tout d'abord

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k \text{ (Moivre)},$$

qui est la somme des termes d'ne suite géométrique de raison e^{ix}. Or, si $x \equiv 0\ [2\pi]$, cette somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Sinon, $e^{ix} \neq 1$ et on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{ix\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{e^{ix\frac{n+1}{2}} - e^{-ix\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{nx}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4 Exponentielle complexe

Définition 4.1 (Exponentielle complexe)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle de z par

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)} \left(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i \sin(\mathrm{Im}(z))\right).$$

Proposition 4.2

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}, \qquad \arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi], \qquad e^z \neq 0.$$

2. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 4.3 (Équations avec l'exponentielle)

1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

2. Tout nombre complexe non nul admet un antécédent par l'exponentielle, *i.e.*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ \exists\, x \in \mathbb{C},\ z = e^x.$$

5 Équations dans $\mathbb{C}$

5.1 Définition

Définition 5.1 (Racines de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une *racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité* est un nombre complexe z tel que

$$z^n = 1.$$

On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Lemme 5.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\left\{e^{2ik\pi/n} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$, et cet ensemble contient exactement n éléments.

Théorème 5.3 (Description des racines de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité distinctes qui sont les complexes

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

On a en plus pour tout $k = 0, \dots, n-1$,

$$\omega_k = \omega_1^k.$$

Remarque.

On peut prendre dans la proposition 5.3 $k = 1, \dots, n$, ou tout intervalle de longueur n.

Définition 5.4 (j)

On définit le nombre complexe j par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 5.5

On a $j^3 = 1$, $\overline{j} = j^2$, $1 + j + j^2 = 0$.

Proposition 5.6

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Alors $j^n = j^m \iff n \equiv m \mod 3$. En particulier, si m est le reste de la division euclidienne de n par 3, $j^n = j^m$.

Proposition 5.7 (Racines carrées, troisièmes et quatrièmes de l'unité)

1. Les racines carrées de 1 sont ± 1.
2. Les racines troisièmes de 1 sont 1, j et $\overline{j}$.
3. Les racines quatrièmes de 1 sont ± 1 et $\pm i$.

5.2 Propriétés

Proposition 5.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $z \in \mathcal{U}_n$.

1. $\overline{z} \in \mathcal{U}_n$.
2. $-z \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si n est pair.

Proposition 5.9

Avec les notations de la proposition 5.3, on a :

1. Si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\overline{\omega}_k = \omega_{n-k}$.
2. $\omega_0 = 1$.
3. Si n est pair, $\omega_{n/2} = -1$.

Méthode 5.10 (Placer les racines n-ème sur le cercle trigonométrique)

On se rappelle des points suivants :

— 1 est toujours racine n-ème de 1.

— -1 ne l'est que si n est pair.

— Dès qu'une racine n-ème est placée, on place son conjugué (symétrique par rapport à l'axe Ox.

Proposition 5.11 (Somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1, et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Alors

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$

Remarque.

Si $\omega = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w^k = n.$

Proposition 5.12

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et z une racine n-ème de 1. Si n divise m, alors z est une racine m-ième de l'unité.

5.3 Racines d'un nombre complexe

Proposition 5.13

Soient $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ $(r \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. L'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions distinctes, qui sont $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1$. Ce sont les racines n-ème de a.
2. Soit z_0 est une racine $n^{\text{ème}}$ de a. Les racines n-ème de a sont $z_0\omega_k$, $k = 0, \dots, n-1$.

Proposition 5.14

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, et ω une racine n-ème de a.

1. $\overline{\omega}$ est racine n-ème de $\overline{a}$.

2. $\overline{\omega}$ est racine n-ème de a si et seulement si $a \in \mathbb{R}$.

3. $-\omega$ est une racine n-ème de a si et seulement si n est pair.

Méthode 5.15 (Calculer les racines n-ième)

On souhaite déterminer les racines n-ième de $a \in \mathbb{C}^*$.

1. On met a sous forme exponentielle $a = re^{i\alpha}$ $(r \in \mathbb{R}_+^*)$ et on détermine une racine n-ième z_0 de a. On peut prendre $z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\alpha/n}$, mais parfois il y a plus simple.

2. On détermine les racines n-ième $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ de 1.

3. Les racines n-ième de a sont alors $z_0, \omega_1 z_0, \dots, \omega_{n-1} z_0$

4. Si a est réel, les conjugués des racines sont encore des racines. Cela permet de n'en calculer que la moitié.

5. Si n est pair, les opposés des racines n-ièmes sont encore des racines n-ièmes. Cela permet de n'en calculer que la moitié.

6. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, $z_0 = \sqrt[n]{a}$ convient.

5.4 Racines carrées et équations du second degré

Méthode 5.16 (Racines carrées d'un complexe sous forme algébrique)

Voici comment calculer les racines carrées de $a \in \mathbb{C}^*$ dont on ne connait pas la forme trigonométrique. Alors si $x, y \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $x + iy$ est une racine carrée de a si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ \mathrm{signe}(xy) = \mathrm{signe}(\mathrm{Im}(a)) \end{cases}.$$

Remarques.

1. Cette proposition est uniquement utile lorsqu'on ne connait pas la forme trigonométrique de a.
2. Rechercher les racines carrées de a donné sous forme algébrique "brutalement" mène à de longs calculs...

Proposition 5.17 (Équations du second degré)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{$\star$}$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors

1. Si $\Delta = 0$, l'équation $(\star)$ admet une racine double $-\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta \neq 0$, et si δ est une racine carrée de Δ, alors $(\star)$ admet deux racines distinctes qui sont

$$\frac{-b+\delta}{2a}, \qquad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Proposition 5.18

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. z est solution de l'équation $au^2 + bu + c = 0$ si et seulement si $\overline{z}$ est solution de l'équation $\overline{a}u^2 + \overline{b}u + \overline{c} = 0$.
2. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $z \notin \mathbb{R}$ est solution de $au^2 + bu + c = 0$, alors les solutions de l'équation $au^2 + bu + c = 0$ sont z et $\overline{z}$.

Proposition 5.19

Soit $u \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $(z - u)(z - \overline{u}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(u)z + |u|^2$.

Proposition 5.20

Soient $s, p \in \mathbb{C}$. Pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} r_1 + r_2 = s \\ r_1 r_2 = p \end{cases}$ si et seulement si r_1 et r_2 sont **les** solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $x^2 - sx + p = 0$.

Remarques.

1. Faîtes bien attention au "$-$" de "$-sx$".
2. Dans le cas de l'équation $aX^2+bX+c=0$ ($a\neq 0$), les solutions sont les solutions du système

$$\begin{cases} x+y=-\frac{b}{a} \\ xy=\frac{c}{a} \end{cases}.$$

6 Application à la géométrie

On munit le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Rappelons que les *coordonnées* dans $\mathcal{R}$ d'un point $M\in\mathcal{P}$ sont deux réels (x,y) tels que

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath},$$

et que la norme de $\overrightarrow{OM}$ est le réel

$$\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

L'*affixe* de M est le nombre complexe $z=x+iy$. On a donc

$$\|\overrightarrow{OM}\|=|z|,$$

et si $M'\in\mathcal{P}$ a pour affixe $z'\in\mathbb{C}$, alors

$$M=M' \iff z=z'.$$

De plus, si $z=re^{i\theta}$ ($r\in\mathbb{R}_+$, $\theta\in\mathbb{R}$) est la forme trigonométrique de l'affixe de M et si $M\neq O$, alors

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{r}=\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}=\cos(\theta)\vec{\imath}+\sin(\theta)\vec{\jmath}\quad\text{donc}\quad(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})\equiv\theta\ [2\pi].$$

Rappelons également que si $a,b\in\mathbb{C}$ sont les affixes des points A,B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

6.1 Généralités

Proposition 6.1

Soient $A,B,C,D\in\mathcal{P}$ d'affixes respectives $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, et $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z,z'\in\mathbb{C}$. Alors

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.
2. Pour tous réel λ,μ, le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z+\mu z'$.
3. Si $A\neq B$ et $C\neq D$,

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi].$$

Proposition 6.2 (CNS d'alignement et d'orthogonalité)

Soient A, B, M trois points du plan tels que $M \neq B$, d'affixes respectives $a, b, z \in \mathbb{C}$. Alors

1. A, B et M sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$.

2. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

6.2 Transformations du plan - Similitudes directes

Soit f une transformation du plan. On lui associe une application $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour $z, z' \in \mathbb{C}$ par

$$g(z) = z' \iff f(M) = M',$$

où M a pour affixe z et M' a pour affixe z'. La fonction f est alors *représentée dans le plan complexe par g*. Deux transformations du plan sont égales si et seulement si leurs représentations complexes sont égales.

Définition 6.3

1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

2. Soit Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre Ω, de rapport k, est l'application qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

3. Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω, de mesure d'angle θ, est l'application qui à un point M du plan associe lui-même si $M = \Omega$, et sinon l'unique point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \mod 2\pi$.

Proposition 6.4

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b est représentée par l'application
$$z \longmapsto z + b.$$

2. L'homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et de centre Ω d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et représentée par l'application
$$z \longmapsto \omega + k(z - \omega).$$

3. La rotation de centre Ω d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est représentée par l'application
$$z \longmapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Définition 6.5 (Similitudes directes)

Les similitudes directes sont les transformations du plan représentées dans le plan complexe par les fonctions $z \longmapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Remarque.

Les translations, homothéties de rapport non nul et les rotations sont donc des similitudes directes.

Proposition 6.6 (Reconnaître une homothétie et une rotation)

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et f la similitude directe représentée par $z \longmapsto az + b$.

1. Si $a = 1$, f est une translation.
2. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f est une homothétie de rapport a.
3. Si $a \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$, f est une rotation de mesure d'angle $\arg(a)$.

Proposition 6.7 (Conservation des angles orientés - Multiplication des distances)

Une similitude directe conserve les angles orientés et les rapports des distances.