TD n° 1

Exprimer un résultat

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.

Unités et multiples

Entraînement 1.1 — Multiples du mètre.

Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

a) 1 dm ......

b) 2,5 km .....

c) 3 mm ......

d) 7,2 nm .....

e) 5,2 pm .....

f) 13 fm ......

Entraînement 1.2 — Multiples du mètre *bis*.

Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

a) 150 km ....

b) 0,7 pm .....

c) 234 cm ....

d) 120 nm ....

e) 0,23 mm ...

f) 0,41 nm ....

Entraînement 1.3 — Vitesse d'un électron.

La vitesse d'un électron est $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$, où $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C est la charge d'un électron, $U = 0{,}150$ kV est une différence de potentiel et $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ g est la masse d'un électron.

a) Calculer v en m/s ....

b) Calculer v en km/h ....

Entraînement 1.4 — Avec des joules.

On considère la grandeur $T = 0{,}67\ \mathrm{kW \cdot h}$. *On rappelle que* $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W \cdot s}$.

Convertir T en joule, en utilisant le multiple le mieux adapté ....

Entraînement 1.5 — Valeur d'une résistance.

La résistance d'un fil en cuivre est donnée par la formule $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$, où $\gamma = 59\,\mathrm{MS/m}$ est la conductivité du cuivre, où $\ell = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{cm}$ est la longueur du fil et où $S = 3{,}1\,\mathrm{mm}^2$ est sa section.

*L'unité des résistances est l'*ohm, *notée « Ω ». L'unité notée « S » est le* siemens *; on a* $1\,\Omega = 1\,\mathrm{S}^{-1}$.

Calculer R (en ohm) ....

Entraînement 1.6 — Ronna, ronto, quetta et quecto.

En novembre 2022, lors de la 27e réunion de la Conférence générale des poids et mesures, a été officialisée l'existence de quatre nouveaux préfixes dans le système international :

Facteur multiplicatif	Préfixe	Symbole
10^{27}	ronna	R
10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q
10^{-30}	quecto	q

On donne les masses de quelques objets :

Soleil	Jupiter	Terre	proton	électron
$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	$1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	$9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kg

Convertir ces masses en utilisant ces nouveaux préfixes (en écriture scientifique).

a) Soleil (en Rg) ....

b) Soleil (en Qg) ....

c) Jupiter (en Rg) ....

d) Jupiter (en Qg) ....

e) Terre (en Rg) ....

f) Terre (en Qg) ....

g) proton (en rg) ....

h) proton (en qg) ....

i) électron (en rg) ....

j) électron (en qg) ....

Entraînement 1.7 — Un peu de cuisine.

Les ingrédients pour un gâteau sont : 4 œufs, 200 g de farine, 160 g de beurre, 100 g de sucre et 4 g de sel. On décide de faire la recette avec 5 œufs. Combien de grammes faut-il de

a) farine ? ....

b) beurre ? ....

c) sucre ? ....

d) sel ? ....

Entraînement 1.8 — Pourcentages.

Convertir en pourcentage :

a) 0,1 ....

b) 0,007 ....

c) $\dfrac{1}{2}$ ....

d) $\dfrac{1}{20}$ ....

e) $\dfrac{9}{5}$ ....

f) un quart de 2 % ....

Entraînement 1.9 — Énergie en France 1.

La consommation d'énergie primaire en France (en 2020) est : nucléaire 40,0 %, pétrole 28,1 %, gaz 15,8 %, biomasse 4,4 %, charbon 2,5 % hydraulique 2,4 %, éolien 1,6 %.

Quel pourcentage occupent les autres énergies (solaire, biocarburants, *etc.*) ? ....

Entraînement 1.10 — Énergie en France 2.

La consommation primaire totale en France est de 2 571 TWh.

À l'aide des données de l'entraînement précédent, calculer (en « TWh ») les énergies créées par les sources suivantes :

a) nucléaire ....

b) pétrole ....

c) gaz ....

d) biomasse ....

e) charbon ....

f) hydraulique ....

g) éolien ....

h) autre ....

Entraînement 1.11 — Abondance des éléments dans la croûte terrestre.

L'abondance chimique d'un élément peut être exprimée en « parties par centaine » (notée %, on parle communément de « pourcentage »), en « parties par millier » (notée ‰, on parle aussi de « pour mille ») ou encore en « partie par millions » (notée « ppm »).

Les abondances de quelques éléments chimiques constituant la croûte terrestre sont :

Silicium	Or	Hydrogène	Fer	Oxygène	Cuivre
275‰	$1{,}0 \cdot 10^{-7}$ %	1,4 ‰	50 000 ppm	46 %	50 ppm

Quel est l'élément le moins abondant ? ....

Longueurs, surfaces et volumes

Entraînement 1.12 — Taille d'un atome.

La taille d'un atome est de l'ordre de 0,1 nm.

a) Quelle est sa taille en m (écriture scientifique) ? ....

b) Quelle est sa taille en m (écriture décimale) ? ....

Entraînement 1.13 — Alpha du centaure.

La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s. Une année dure 365,25 jours. Alpha du centaure est à une distance de 4,7 années-lumière de la Terre.

a) Quelle est cette distance en m (écriture scientifique) ? ....

b) Quelle est cette distance en km (écriture scientifique) ? ....

Entraînement 1.14 — Avec des hectares.

La superficie de la France est de 672 051 km^2. L'île danoise de Bornholm (au nord de la Pologne) a une superficie de 589 km^2. Un hectare (ha) est la surface d'un carré de 100 m de côté.

Donner les superficies suivantes :

a) un hectare (en m^2) ....

b) un hectare (en km^2) ....

c) la France (en m^2) ....

d) la France (en ha) ....

e) Bornholm (en m^2) ....

f) Bornholm (en ha) ....

Entraînement 1.15 — Volume.

a) Peut-on faire tenir 150 mL d'huile dans un flacon de $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ m^3 ? ....

b) Peut-on faire tenir 1,5 L d'eau dans un flacon de $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ m^3 ? ....

Masse volumique, densité et concentration

Entraînement 1.16 — Masse volumique.

Une bouteille d'eau de 1 L a une masse de 1 kg. Un verre doseur rempli indique, pour la même graduation, eau : 40 cL et farine : 250 g.

a) Quelle est la masse volumique de l'eau en $\mathrm{kg/m^3}$? ....

b) Quelle est la masse volumique de la farine ? ....

Entraînement 1.17 — Densité.

La densité d'un corps est le rapport $\dfrac{\rho_{\text{corps}}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}$, où ρ_{corps} est la masse volumique du corps en question.

a) Une barre de fer de volume 100 mL pèse 787 g. Quelle est la densité du fer ? ....

b) Un cristal de calcium a une densité de 1,6. Quelle est sa masse volumique (en $\mathrm{kg/m^3}$) ? .....

Entraînement 1.18 — Un combat de masse.

On possède un cube de 10 cm en plomb de masse volumique $11{,}20\,\mathrm{g/cm^3}$ et une boule de rayon 15 cm en or de masse volumique $19\,300\,\mathrm{kg/m^3}$. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Lequel possède la plus grande masse ? ....

Entraînement 1.19 — Prendre le volant ?

Le taux maximal d'alcool dans le sang pour pouvoir conduire est de 0,5 g d'alcool pour 1 L de sang.

A-t-on le droit de conduire avec 2 mg d'alcool dans $1\,000\,\mathrm{mm^3}$ de sang ? ....

Autour de la vitesse

Entraînement 1.20 — Le guépard ou la voiture ?

Un guépard court à 28 m/s et un automobiliste conduit une voiture à 110 km/h sur l'autoroute.

Lequel est le plus rapide ? . . . .

Entraînement 1.21 — Classement de vitesses.

On considère les vitesses suivantes : 20 km/h, 10 m/s, 1 année-lumière/an, 22 mm/ns, 30 dm/s et 60 cm/ms.

a) Laquelle est la plus petite ? . . . .

b) Laquelle est la plus grande ? . . . .

Autour des dimensions

Entraînement 1.22 — Dimensions.

Donner les dimensions fondamentales des grandeurs suivantes :

a) Une vitesse . . . .

b) Une surface . . . .

c) Un volume . . . .

d) Une masse volumique . . . .

e) Une accélération . . . .

f) Une énergie . . . .

g) Une concentration molaire . . . .

h) Une masse linéique . . . .

i) Une puissance . . . .

j) Une force . . . .

k) Une fréquence . . . .

l) Une longueur d'onde . . . .

Entraînement 1.23 — Dimensions.

Donner les dimensions fondamentales des grandeurs suivantes :

a) La température T d'un gaz est lié à la vitesse v des particules et à leur masse m par la relation

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Quelle est la dimension de k_B ? . . . .

b) La variation d'énergie interne U d'un gaz parfait est donné par la relation :

$$\Delta U = C_v \Delta T$$

Quelle est la dimension de C_v ? . . . .

c) La force d'interaction gravitationnelle agissant entre deux masses m et m' distantes de d est :

$$F = \mathcal{G}\frac{mm'}{d^2}$$

Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$? .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$1{,}3 \cdot 10^{-14}$ m $10\,000$ m^2 $5{,}2 \cdot 10^{-12}$ m   La boule en or $0{,}01$ km^2 $9{,}10 \cdot 10^{-1}$ rg

30 dm/s $2{,}5 \cdot 10^3$ m   oui   406 TWh $M^{-1}.L^3.T^{-2}$ l'or   5 %   250 g

$1{,}50 \cdot 10^5$ m   125 g $1{,}20 \cdot 10^{-7}$ m   722 TWh $M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$ $5{,}89 \cdot 10^4$ ha L^2

$1 \cdot 10^3$ kg/m^3 $9{,}10 \cdot 10^2$ qg T^{-1} $4{,}33 \cdot 10^{13}$ km   non $M.L.T^{-2}$ $4{,}1 \cdot 10^{-10}$ m

$M.L^{-3}$ 180 % $1{,}6 \times 10^3$ kg/m^3 $1{,}90 \cdot 10^3$ Rg L^3 $2{,}3 \cdot 10^{-4}$ m $M.L^2.T^{-2}$

$N.L^{-3}$ oui L $3 \cdot 10^{-3}$ m   1 année-lumière/an $1 \cdot 10^{-10}$ m   200 g   7,87

$1{,}99 \cdot 10^6$ Rg $4{,}43 \cdot 10^{16}$ m $5{,}89 \cdot 10^8$ m^2 $1{,}67 \cdot 10^3$ rg $M.L^2.T^{-3}$ 41 TWh

$M.L^{-1}$ 5,97 Rg $5{,}97 \cdot 10^{-3}$ Qg $1{,}99 \cdot 10^3$ Qg   134 TWh $7 \cdot 10^{-13}$ m   0,5 %

$7{,}3 \cdot 10^6$ m/s   5 g $M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$ voiture   1,90 Qg $2{,}6 \cdot 10^7$ km/h   50 %

$6{,}72 \cdot 10^7$ ha $M.L.T^{-2}$ 2,34 m   625 kg/m^3 0,000 000 000 1 m $M.L.T^{-2}$

$1{,}67 \cdot 10^6$ qg   0,7 % $1 \cdot 10^{-1}$ m $5{,}5 \cdot 10^{-2}\ \Omega$ 62 TWh   5,2%   64 TWh

10% $6{,}72 \cdot 10^{11}$ m^2 $7{,}2 \cdot 10^{-9}$ m   113 TWh   2,4 MJ $1{,}03 \times 10^3$ TWh

✍ **Exercice 1 : Homogénéité en mécanique**

La grandeur F représente une force, L une longueur, v une vitesse, a une accélération, T un temps, m une masse. Les formules suivantes sont-elles homogènes ?
$F = \frac{mv^2}{5L}$; $v = \sqrt{2gL}$; $v = \sqrt{2gL}$; $T = 2La$; $T = \sqrt{2La}$; $T = \sqrt{\frac{2L}{a}}$.

✍ **Exercice 2 : Chute d'un flocon de neige**

On s'intéresse à la chute dans l'air d'un flocon de neige, supposé sphérique, de rayon $r = 0{,}5$ mm et de masse volumique μ. La viscosité de l'air est η, sa masse volumique μ_a. On suppose ces grandeurs constantes. Du fait de la viscosité de l'air, le flocon est soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse v :$F = -6\pi r\eta v$ (force de Stockes). On peut considérer, qu'une fois formé dans le nuage, le flocon commence son mouvement de chute sans vitesse initiale. Quelle est la dimension de la viscosité η de l'air.

✍ **Exercice 3 : Homogénéité de formules classiques**

1. En statique des fluides, on démontre : $p_2 - p_1 = \rho g(z_2 - z_1)$ avec, p_1 , p_2 la pression en 2 points, ρ la masse volumique, z_1 , z_2 deux altitudes. Vérifier l'homogénéité de cette formule.
2. Sachant que la fréquence d'une corde vibrante est liée à sa longueur l , à sa tension F , à sa masse linéique μ par une relation du type : $f = Kl^\alpha F^\beta \mu^\gamma$, avec K une constante : déterminer $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ par des considérations d'homogénéité.
3. Vérifier l'homogénéité de la formule de la théorie cinétique des gaz :$p = \frac{1}{3}nmu^2$ où p est la pression du gaz , n le nombre de molécules par unité de volume, m la masse des molécules et u leur vitesse efficace.
4. Un corps, de masse m , qui tombe en chute libre d'une hauteur h acquiert la vitesse $v = km^\alpha h^\beta g^\gamma$. Déterminer $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

✍ **Exercice 4 : Intérêt de l'analyse dimensionnelle**

L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ où ω désigne la vitesse de rotation du solide en rad.s^{-1}.

1. Quelle est la dimension du moment d'inertie J ?
2. Un élève propose pour formule du moment cinétique de la sphère $J = \frac{5}{2}m^2R$ avec m la masse du solide et R son rayon. Est-ce raisonnable ?
3. Le même élève a trouvé comme résultat du problème de mécanique que l'accélération a du solide était : $a = \frac{(M\sin\alpha - m)g}{M+m+J/R^2}$, où M et m désignent des masses et g l'accélération de la pesanteur. Est-ce raisonnable du point de vue de l'homogénéité ?

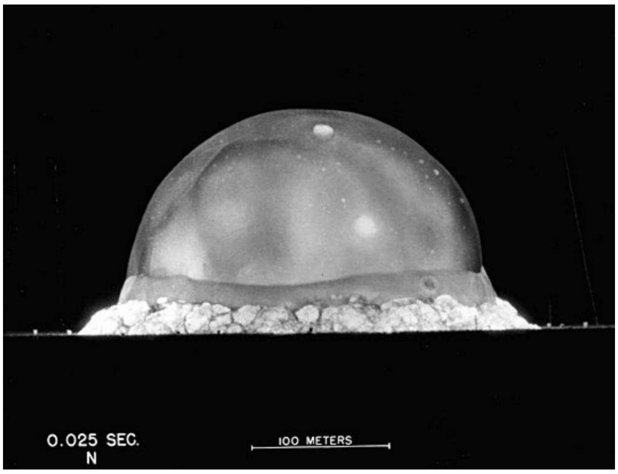
✍ Exercice 5 : **Vitesse des ondes sonores**

La vitesse de propagation du son s'exprime en fonction de $\chi = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp}$, un coefficient de compressibilité du gaz (où v désigne le volume massique et p la pression) et de sa masse volumique μ.

1. Déterminer la dimension de χ.
2. Donner l'expression de la vitesse à une constante près.

✍ Exercice 6 : **Energie d'une explosion nucléaire**

Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet était classées ultra-secrètes par la CIA. La légende raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor[1] (1886-1975) aurait pu en 1950 à l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, estimer l'énergie E dégagée par cette explosion nucléaire.
Le raisonnement est le suivant : le film permet d'avoir accès à l'évolution $R(t)$ du rayon du nuage formé par l'explosion au cours du temps. Les paramètres influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie E, et la masse volumique de l'air ρ



1. On cherche alors R, sous la forme : $R = E^a t^b \rho^c$. Déterminer a, b et c.
2. Déduire de la question précédente l'expression de l'énergie libérée en fonction de R, ρ et t.
3. Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie.
4. Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT. Sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ 4.10^6 J, calculer l'énergie libérée par l'explosion Trinity et commenter la qualité du résultat obtenu par analyse dimensionnelle

1. Il est notamment connu pour ses travaux sur la turbulence et les phénomènes non-linéaires. Je vous suggère de consulter sur wikipedia les articles concernant : l'instabilité de Rayleigh-Taylor, l'instabilité de Taylor-Couette, le nombre de Taylor ou encore le cône de Taylor.

✍ Exercice 7 : **Dino Vs Chat-GPT5**

On donne l'énoncé suivant à Chat-GPT. L'objectif est de contrôler et éventuellement de corriger sa réponse. On pressent que la vitesse de marche V d'un animal dépend de sa masse m, de la longueur de ses jambes L_J, de la longueur d'une enjambée L_E et de l'accélération de la pesanteur g. On cherche donc V sous la forme :

$$V = k m^{\alpha} L_J^{\beta} L_E^{\gamma} g^{\delta},$$

où k, α, β, γ et δ sont des constantes sans dimension.

1. Quelle est la dimension de g ? En quelle unité du système international s'exprime-t-elle ?
2. En utilisant l'analyse dimensionnelle, calculer α et δ.
3. La vitesse de la marche dépend-elle de la masse du dinosaure ?
4. En utilisant l'analyse dimensionnelle, exprimer γ en fonction de β.
5. En déduire que :

$$V = k \left(\frac{L_J}{L_E}\right)^{\beta} \sqrt{g}\sqrt{L_E}.$$

   On trouve des traces de pas fossiles d'un dinosaure. Le diamètre du pied est de 0.95 m et l'enjambée L_E de 2.20 m. On sait par ailleurs que pour tous les animaux, la longueur des jambes L_J est environ 4 fois le diamètre des pieds.

6. Calculer le rapport des longueurs $\frac{L_J}{L_E}$ pour ce dinosaure.
7. Sachant que la longueur de la jambe d'un homme est d'environ $L_J = 85\,\text{cm}$, quelle est la valeur d'une enjambée humaine donnant le même rapport $\frac{L_J}{L_E}$ que celui du dinosaure ?
8. Donner une estimation raisonnable de la vitesse à laquelle marcherait un homme avec une telle enjambée.
9. En déduire une valeur approximative de la vitesse de marche du dinosaure (on donnera la formule littérale et on effectuera l'application numérique).
10. Commenter la valeur trouvée.

Correction proposée - Exercice 7 : Marche des dinosaures

On suppose

$$V = k\, m^{\alpha} L_J^{\beta} L_E^{\gamma} g^{\delta}, \qquad [V] = LT^{-1},\ [m] = M,\ [L_J] = L,\ [L_E] = L,\ [g] = LT^{-2}.$$

1) La dimension de g est $[g] = LT^{-1}$, donc l'unité SI est m.s^{-1}.

2) Équations d'homogénéité.
Masse : $M^{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.
Temps : $T^{-1} = T^{-2\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}$.
Longueur : $L^1 = L^{\beta+\gamma+\delta} \Rightarrow \beta + \gamma + \delta = 1 \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{1}{2}$.

3) Comme $\alpha = \frac{1}{2}$, la vitesse dépend de la masse : $V \propto \sqrt{m}$.

4) On tire γ en fonction de β :

$$\beta + \gamma = \tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ \gamma = \tfrac{1}{2} - \beta.$$

5) En réinjectant, on peut écrire

$$V = k \left(\frac{L_J}{L_E} \right)^{\beta} \sqrt{g\, L_E}.$$

6) Données fossiles : diamètre du pied $= 0{,}95\,\text{m}$, donc $L_J \simeq 4 \times 0{,}95 = 3{,}80\,\text{m}$, et $L_E = 2{,}20\,\text{m}$.
Le rapport vaut

$$\frac{L_J}{L_E} \approx \frac{3{,}80}{2{,}20} \approx 1{,}45.$$

7) Pour un humain ($L_J = 0{,}85\,\text{m}$) avec le même rapport $r = L_J/L_E$, on a $L_E^{(\text{hum})} = L_J/r$.
Donc

$$L_E^{(\text{hum})} \approx \frac{0{,}85}{1{,}45} \approx 0{,}59\,\text{m}.$$

8) Estimation de la vitesse humaine avec cette enjambée.
En prenant $k = 1$ et $\beta = 1$ à titre d'approximation,

$$V_{\text{hum}} \approx \left(\frac{L_J}{L_E} \right) \sqrt{g\, L_E} \approx 1{,}45 \times \sqrt{9{,}81 \times 0{,}59} \approx 1{,}45 \times 2{,}41 \approx 3{,}5\,\text{m.s}^{-1} \ (\approx 12{,}6\,\text{km.h}^{-1}),$$

ce qui correspond à une marche soutenue.

9) Vitesse du dinosaure (même choix de k et β). Avec $L_E = 2{,}20\,\text{m}$:

$$V_{\text{dino}} \approx \left(\frac{L_J}{L_E} \right) \sqrt{g\, L_E} \approx 1{,}45 \times \sqrt{9{,}81 \times 2{,}20} \approx 1{,}45 \times 4{,}65 \approx 6{,}7\,\text{m.s}^{-1} \ (\approx 24\,\text{km.h}^{-1}).$$

10) Commentaire. La valeur obtenue semble cohérente pour une locomotion pédestre rapide ; la dépendance en $\sqrt{m}$ explique que les grands animaux puissent conserver des vitesses comparables malgré leur masse.