- Chapitre 3 : Calculs Algébriques -

Ce chapitre a pour objectifs de :
- manipuler les symboles somme, produit
- établir des résultats fondamentaux qui nous seront utiles tout au long de l'année
- (re)découvrir les coefficients binomiaux et leurs nombreuses qualités algébriques

I Rappels d'algèbre élémentaire

A Puissance entière

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit *a puissance n* par $a^n = \underbrace{a \times a \times .... \times a}_{n \text{ fois}}$ avec la convention $a^0 = 1$
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. On étend la définition précédente de a^n par : Si $n \in \mathbb{Z}^-$, on pose $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.
- Propriétés :
  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad a^{mn} = (a^m)^n \qquad (ab)^n = a^n \times b^n \qquad a^m a^n = a^{m+n}$
  Ces égalités restent vraies lorsque m ou n est négatif, à condition que a et b soient non nuls.
- Même si le chapitre sur les nombres complexes viendra prochainement, ces notions restent valables lorsque $a, b \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{C}^*$) comme vous avez pu le voir en terminale.

B Identités Remarquables

Les formules suivantes, nouvelles ou non pour vous, doivent être parfaitement maitrisées. Leur démonstration s'obtient par exemple en développant un membre de l'égalité pour arriver à l'autre membre.

$$\begin{array}{lrcl rcl}
\forall a, b \in \mathbb{C}, & a^2 - b^2 & = & (a-b)(a+b) & & & \\
 & (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 & (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\
 & (a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 & = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 & a^3 - b^3 & = & (a-b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 + b^3 & = & (a+b)(a^2 - ab + b^2)
\end{array}$$

Une dernière formule élémentaire, moins commune mais qui peut se révéler pratique :
$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad 1 + a + b + ab = (1+a)(1+b)$

Exemple(s) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 5^{n+2} - 5^{n+1} - 9 \times 5^n + 3 \times 5^{n-1} \qquad B = \frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4} \qquad C = \frac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}$$

II Somme

cf tableau

III Produit

A Définition

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq n$. Soit $a_m, a_{m+1}, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

Le produit $a_m \times a_{m+1} \times ... \times a_n$ se note $\boxed{\prod_{k=m}^{n} a_k}$ (ou $\prod_{m \leq k \leq n} a_k$) ($k$ est toujours appelée variable muette)

Extension Soit I un ensemble fini. Le produit de tous les termes d'une suite $(a_i)_{i \in I}$ indexée par I se note $\prod_{i \in I} a_i$.

Toujours avec la convention lorsque $I = \emptyset$, pour le *produit vide* : $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$

Exemple(s) : $\prod_{k=5}^{7} \cos(k\pi) =$

$\prod_{k=m}^{n} \alpha =$

$\prod_{k=m}^{n} (\alpha a_k) =$

B Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle n le nombre entier $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ (pour $n \neq 0$)

Ce nombre est notée $\boxed{n!}$. Pour $n = 0$, on pose $0! = 1$.

Exemple(s) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = (n+1)(n+2)...(2n)$, $B = 2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n)$ et $C = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$. Exprimons A, B, C à l'aide de la factorielle :

C Produit télescopique

Proposition Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq n$. Soit $a_m, a_{m+1}, ..., a_n, a_{n+1} \in \underline{\mathbb{C}^*}$. On a : $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$

dém 1 :

□

D Produit double

Soit une suite doublement indexée $((a_{ij}))_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}}$. On appelle produit double le produit de tous ces termes, noté $\prod_{m \leq i \leq n, p \leq j \leq q} a_{ij}$. Les formules vues avec les sommes doubles restent vraies (sauf la dernière) avec $\prod$ au lieu de $\sum$.

⚠ En général, $\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{q} a_{ij} \right) \neq \prod_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)$. En effet, par exemple

IV Formules Importantes

cf tableau