Programme de colle S1

Conseils pratiques

- À votre arrivée, séparez le tableau en parties égales entre les 2 ou 3 collé-e-s. Si vous collez avec quelqu'un d'autre que votre professeur, écrivez votre nom.
- **Séparez votre partie du tableau en colonnes.**
N'écrivez ni trop gros, ni trop petit.
- Vous pouvez utiliser une partie du tableau comme brouillon.
- **Ne faites pas crisser la craie.**
On peut rompre un morceau neuf et écrire avec le bout cassé.
- **Rédigez, mais succinctement** : les abréviations sont autorisées, n'écrivez pas les justifications immédiates (il y a l'oral pour ça), ne faites pas de longues phrases.
- **Faire des schémas** pour illustrer une démarche est une bonne idée.
- **La colle est un exercice oral** : il faut s'exercer à s'exprimer clairement devant un examinateur.

Structure de la colle

La colle que vous passerez cette semaine sera composée des étapes suivantes :

1. Quelques définitions, propriétés ou théorème du cours à restituer.
*On attend toujours une restitution **rapide** et **précise**.*
2. Une démonstration du programme de colle à refaire, jusqu'au niveau que vous aurez indiqué (poussin, poulet ou Super-Poulet).
Dans l'idéal, en temps raisonnable (vous serez coupés si cela dure trop) et sans aide.
3. Un développement limité à calculer.
4. Un équivalent à calculer.
5. Un ou plusieurs exercices plus ouverts.

Notions au programme

- **Révisions de première année** : calcul asymptotique, avec en particulier : équivalents usuels, développements limités usuels, calcul d'équivalents et de o .
- **Chapitre 1, Séries numériques** : parties I, II et III.1, III.2

Démonstrations à connaître

Étage 1 / Poussin

- **[§I.2]** Condition nécessaire de convergence d'une série numérique
- **[§I.3]** Étude des séries géométriques $\sum_{n \geq n_0} q^n$ ($q \in \mathbb{C}$)
- **[§II.3]** Linéarité de la sommation des séries
- **[§III.1]** Nature d'une série à termes positifs

Étage 2 / Poulet

Le programme Poussin, ainsi que :

- **[§II.1]** Relation de Chasles pour les séries numériques
- **[§II.2]** Propriétés des restes d'une série convergente
- **[§II.2]** Théorème des séries télescopiques
- **[§III.2]** Théorème de comparaison par inégalités

Étage 3 / Super-Poulet

Les programmes Poussin et Poulet, ainsi que :

- **[Exercice 2]** La série harmonique est divergente (par minoration de tranche)
- **[§I.2]** Séries exponentielles
- **[§III.2]** Théorème de comparaison par équivalents

Compétences attendues

Calcul asymptotique

- Restituer les équivalents usuels [→ **R1 Q2**] et les développements limités usuels [→ **R1 Q11**] **de manière ordonnée**
- Prouver qu'une suite est équivalente à une constante non nulle [→ **R1 Q3**]
- Effectuer un changement de variable dans un équivalent ou un développement asymptotique [→ **R1 Q4**]
- Distinguer les suites infiniment petites des suites infiniment grandes et des suites convergeant vers une constante non nulle [→ **R1 Q6**]
- Calculer un équivalent en décomposant le problème en blocs indépendants qui se multiplient, se divisent et sont élevés à une puissance fixe [→ **R1 Q5**]
- Calculer l'équivalent d'une somme en évaluant le poids relatif des termes [→ **R1 Q8**]
- Calculer un développement limité jusqu'à l'ordre 3 ou 4 [→ **R1 Q12**]

Séries numériques

- Maîtriser la nature des objets relatifs à l'étude des séries [→ **§I, §II.1**] :

Série	$\sum_{n \geq n_0} u_n$
Terme général	$(u_n)_{n \geq n_0}$
Terme de rang n	u_n
Somme partielle de rang n	$S_n := \sum_{k=n_0}^n u_k$
Somme de la série	$S := \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$
Reste de rang n	$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$

- Prouver qu'une série est grossièrement divergente [→ **§I.2, exo 3**]
- Prouver la convergence d'une série en étudiant la limite de ses sommes partielles [→ **exo 1, §II.2, exo 6 Q3**]
- Connaître les séries usuelles : harmonique, géométriques exponentielles, de Riemann [→ **§I.3, §III.4**]
- Envisager un reste de série convergente comme différence entre somme et somme partielle [→ **§II.1/déf.**] ou comme somme d'une série [→ **§II.1/propr.**]; savoir qu'un reste de série convergente tend toujours vers 0.

- Reconnaître une série télescopique; en déduire la nature et la somme éventuelle de la série [→ **§II.2, exo 5**]
- Utiliser la linéarité de la sommation **soigneusement** pour étudier la nature d'une série et sa somme éventuelle [→ **§II.3, exo 6 et 7**]
- Mobiliser les théorèmes de comparaison pour étudier la nature d'une série; **toujours essayer en premier la comparaison par équivalents** [→ **§III.2, exos 8, 9**]
- Étudier la nature d'une série à termes positifs en étudiant le caractère majoré ou non de ses sommes partielles [→ **§III.1 (principe), exo 11 Q1 (application)**] [→ **démo séries de Riemann**]