

Séries numériques (preuves supplémentaires)

I.3 Premières séries de référence

Thm • Séries exponentielles

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre réel ou complexe fixé. Alors :

- 1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente.
- 2) Sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Rem. $\diamond$ Dans le cas où z est un réel x , ce résultat fait penser au **développement limité en 0 de la fonction exponentielle** :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

dans lequel on aurait remplacé l'ordre n par ∞ et où le reste $o(x^n)$ aurait disparu. **Cette idée n'est pas absurde, mais elle pose deux gros problèmes :**

- 1) Un développement limité est **local** : ce qu'il affirme n'est valable que quand $x \rightarrow 0$. Or, ici notre paramètre $x = z$ est fixé.
- 2) Le reste $o(x^n)$ est une fonction dont l'expression n'est pas connue, mais cette dernière dépend de n . **Son comportement quand $n \rightarrow \infty$ est tout à fait imprévisible en l'état actuel !**

Ce raisonnement informel conduit donc pour l'instant à une **conjecture**, mais ne la démontre pas.

Démo. $\Rightarrow$ Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Il s'agit de montrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^z$; pour cela, on majore la distance entre e^z et S_n par l'inégalité de Taylor-Lagrange. On introduit la fonction :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{tz}.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}: f^{(k)}(t) = z^n e^{tz}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ temporairement et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f , à l'ordre n , entre $t = 0$ et $t = 1$:

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où M_{n+1} est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Cela se réécrit :

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{c.-à-d.} \quad |S_n - e^z| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Reste à expliciter le majorant M_{n+1} . Écrivons z sous forme algébrique : $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1]: |f^{(n+1)}(t)| &= |z^{n+1} e^{t(a+ib)}| \\ &= |z|^{n+1} |e^{at} e^{itb}| \\ &= |z|^{n+1} e^{at}. \end{aligned}$$

Pour majorer $a t$, comme le signe de a est inconnu, on le majore par sa valeur absolue :

$$\forall t \in [0, 1]: at \leq |a|t = |a| \cdot t \leq |a|.$$

Par croissance de la fonction exponentielle : $e^{at} \leq e^{|a|}$. On en déduit :

$$\forall t \in [0, 1]: |f^{(n+1)}(t)| \leq |z|^{n+1} \cdot e^{|a|} \quad \text{indépendant de } t,$$

donc $|f^{(n+1)}|$ est majorée par $M_{n+1} := |z|^{n+1} \cdot e^{|a|}$ sur $[0, 1]$.

On a démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}: |S_n - e^z| \leq e^{|a|} \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissance comparée, la suite factorielle l'emporte sur toute suite géométrique :

$$e^{|a|} \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CC} 0.$$

Le théorème d'encadrement montre donc que : $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^z$.

II.1 Restes d'une série divergente

Propr. • Propriétés des restes d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique que l'on suppose convergente,

$(S_n)_{n \geq n_0}$ ses sommes partielles, $(R_n)_{n \geq n_0}$ ses restes et S sa somme.

Alors :

- 1) $\forall n \geq n_0, S_n + R_n = S$.
- 2) La suite $(R_n)_{n \geq n_0}$ des restes tend vers 0.
- 3) Le reste de rang n est égal à la somme de la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$:

$$\forall n \geq n_0, R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Démo. $\Rightarrow$ Par définition du reste d'une série convergente : $\forall n \in \mathbb{N}: R_n = S - S_n$.

1) En ajoutant R_n de chaque côté : $\forall n \in \mathbb{N}: S_n + R_n = S$.

2) Puisque la série est convergente : $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S$, limite finie.

Par différence de limites finies dans la définition de R_n :

$$R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0.$$

- 3) Fixons un entier $n \geq n_0$. Puisque la série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ est convergente, par la relation de Chasles pour les séries, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ converge également, et leurs sommes respectives vérifient :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k}_S = \underbrace{\sum_{k=n_0}^n u_k}_{S_n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n = R_n.$$

IV Séries absolument convergentes et extensions des techniques de comparaison

IV.1 Séries absolument convergentes

Thm • Théorème fondamental des séries absolument convergentes

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démo. $\Leftrightarrow$ 1) Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite **réelle** telle que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ soit absolument convergente.

Cela signifie que $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ est convergente. On sépare la « partie positive » de la « partie négative » de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ en introduisant, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -u_n & \text{si } u_n < 0. \end{cases}$$

Les deux suites $(u_n^+)_{n \geq n_0}$ et $(u_n^-)_{n \geq n_0}$ sont intéressantes à plus d'un titre. On constate immédiatement qu'elles sont **positives**. De plus, pour tout rang $n \geq n_0$, on a simultanément $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

La positivité de u_n^- permet de voir que $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$. Puisque $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ est convergente, $\sum_{n \geq n_0} u_n^+$ l'est aussi par le théorème de comparaison des séries. On raisonne

de même pour prouver que $\sum_{n \geq n_0} u_n^-$ est convergente.

Mais puisque $u_n = u_n^+ - u_n^-$, par linéarité la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

- 2) Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite **complexe** telle que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ soit absolument convergente, on sépare partie réelle et partie imaginaire. On pose $x_n = \operatorname{Re}(u_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(u_n)$, de sorte que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = x_n + i y_n$. Puisque $0 \leq |x_n| \leq |u_n|$, le théorème de comparaison des séries (réelles) donne que $\sum_{n \geq n_0} |x_n|$ est convergente. Autrement dit, $\sum_{n \geq n_0} x_n$ est une série (réelle) absolument convergente.

En appliquant le point précédent, elle est convergente. On raisonne de même pour $\sum_{n \geq n_0} y_n$, puis on conclut que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente en utilisant la linéarité de la sommation des séries.

VI Produit de Cauchy de deux séries

Thm • Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels ou complexes.

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors :

- 1) leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ l'est également,
- 2) et leurs sommes vérifient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \times \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} v_{\ell} \right).$$

Démo. $\Leftrightarrow$ 1) On traite d'abord le cas des séries $\sum r_n$ et $\sum s_n$ à termes positifs : sous cette hypothèse, toutes les séries manipulées sont à termes positifs.

On note $\sum t_n$ leur produit de Cauchy et R_n , S_n et T_n leurs sommes partielles respectives.

On introduit les ensembles $K_n = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq k, \ell \leq n\}$ (« carré de côté n ») et $\Delta_n = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq k + \ell \leq n\}$ (« triangle de côté n »).

Soulignons que $K_n \subset \Delta_{2n} \subset K_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si on somme la quantité **positive** $r_k s_{\ell}$ en faisant varier le couple (k, ℓ) dans un de ces ensembles, le résultat est d'autant plus grand que l'ensemble est grand.

En reconnaissant deux sommes rectangulaires et en sommant les termes de Δ_n suivant des lignes diagonales, on aboutit à l'encadrement entre sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n \times S_n \leq T_{2n} \leq R_{2n} \times S_{2n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} r_k \times \sum_{\ell=0}^{\infty} s_{\ell}.$$

Ceci prouve que la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ est majorée, donc la convergence du produit de Cauchy $\sum t_n$. En appliquant désormais le théorème d'encadrement à ces inégalités,

on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \times \sum_{\ell=0}^{\infty} s_{\ell}$.

- 2) Pour deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes, on pose $\sum w_n$ leur produit de Cauchy et U_n , V_n et W_n les sommes partielles associées ; $r_n = |u_n|$, $s_n = |v_n|$ et $\sum t_n$ le produit de Cauchy de $\sum r_n$ et $\sum s_n$. D'après la première partie, $\sum r_n$ est convergente et $T_{2n} - R_n \times S_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On prouve alors que $|w_n| \leq t_n$, ce qui donne l'absolue convergence de $\sum w_n$. Enfin, pour tout rang $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |W_{2n} - U_n V_n| &= \left| \sum_{\Delta_{2n}} u_k v_{\ell} - \sum_{K_n} u_k v_{\ell} \right| \\ &= \left| \sum_{\Delta_{2n} \setminus K_n} u_k v_{\ell} \right| \\ &\leq \sum_{\Delta_{2n} \setminus K_n} |u_k v_{\ell}| \\ &= \sum_{\Delta_{2n}} |u_k v_{\ell}| - \sum_{K_n} |u_k v_{\ell}| \\ &= T_{2n} - R_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

mais comme par ailleurs $\left| W_{2n} - U_n V_n \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{k=0}^{\infty} u_k \times \sum_{\ell=0}^{\infty} v_{\ell} \right|$,
 par unicité de la limite, la relation souhaitée est démontrée.