Séries numériques (preuves supplémentaires)

I.3 Premières séries de référence

Thm • Séries exponentielles

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre réel ou complexe fixé. Alors :

1) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente.

2) Sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Rem. ◇ Dans le cas où z est un réel x, ce résultat fait penser au **développement limité en 0 de la fonction exponentielle :**

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n),$$

dans lequel on aurait remplacé l'ordre n par ∞ et où le reste $\mathrm{o}(x^n)$ aurait disparu. **Cette idée n'est pas absurde, mais elle pose deux gros problèmes :**

1) Un développement limité est **local :** ce qu'il affirme n'est valable que quand $x \to 0$. Or, ici notre paramètre $x = z$ est fixé.

2) Le reste $\mathrm{o}(x^n)$ est une fonction dont l'expression n'est pas connue, mais cette dernière dépend de n. **Son comportement quand $n \to \infty$ est tout à fait imprévisible en l'état actuel !**

Ce raisonnement informel conduit donc pour l'instant à une **conjecture,** mais ne la démontre pas.

Démo. ☞ Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$. Il s'agit de montrer que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^z$; pour cela, on majore la distance entre e^z et S_n par l'inégalité de Taylor-Lagrange. On introduit la fonction :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{tz}. \end{array}$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R} : \quad f^{(k)}(t) = z^n\, \mathrm{e}^{tz}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ temporairement et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f, à l'ordre n, entre $t = 0$ et $t = 1$:

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leqslant M_{n+1} \cdot \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où M_{n+1} est un majorant de $\left| f^{(n+1)} \right|$ sur l'intervalle $[0,1]$. Cela se réécrit :

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{n!} \right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{c.-à-d.} \quad \left| S_n - \mathrm{e}^z \right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Reste à expliciter le majorant M_{n+1}. Écrivons z sous forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}\, b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1] : \quad \left| f^{n+1}(t) \right| &= \left| z^{n+1}\, \mathrm{e}^{t(a+\mathrm{i}b)} \right| \\ &= |z|^{n+1} \left| \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} \right| \\ &= |z|^{n+1}\, \mathrm{e}^{at}. \end{aligned}$$

Pour majorer $a\,t$, comme le signe de a est inconnu, on le majore par sa valeur absolue :

$$\forall\, t \in [0,1] : \quad a\,t \leqslant |a\,t| = |a| \cdot t \leqslant |a|.$$

Par croissance de la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^{at} \leqslant \mathrm{e}^{|a|}$. On en déduit :

$$\forall\, t \in [0,1] : \quad \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leqslant |z|^{n+1} \cdot \mathrm{e}^{|a|} \quad \textbf{indépendant de } t,$$

donc $\left| f^{(n+1)} \right|$ est majorée par $M_{n+1} := |z|^{n+1} \cdot \mathrm{e}^{|a|}$ sur $[0,1]$.

On a démontré :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \left| S_n - \mathrm{e}^z \right| \leqslant \mathrm{e}^{|a|} \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissance comparée, la suite factorielle l'emporte sur toute suite géométrique :

$$\mathrm{e}^{|a|} \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CC}} 0.$$

Le théorème d'encadrement montre donc que : $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^z$.

II.1 Restes d'une série divergente

Propr. • Propriétés des restes d'une série convergnte

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série numérique que l'on suppose convergente,

$(S_n)_{n\geqslant n_0}$ ses sommes partielles, $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ ses restes et S sa somme.

Alors :

1) $\forall\, n \geqslant n_0, \quad S_n + R_n = S.$

2) La suite $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ des restes tend vers 0.

3) Le reste de rang n est égal à la somme de la série $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$:

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Démo. ☞ Par définition du reste d'une série convergente : $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ R_n = S - S_n$.

1) En ajoutant R_n de chaque côté : $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ S_n + R_n = S$.

2) Puisque la série est convergente : $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, limite finie.

Par différence de limites finies dans la définition de R_n :

$$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0.$$

3) Fixons un entier $n \geqslant n_0$. Puisque la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n = \sum\limits_{k \geqslant n_0} u_k$ est convergente, par la relation de Chasles pour les séries, la série $\sum\limits_{k \geqslant n+1} u_k$ converge également, et leurs sommes respectives vérifient :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}_{S_n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \qquad \text{d'où} \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n = R_n.$$