

Attention : un Devoir à rédiger à la Maison, en temps illimité, est avant tout un exercice de rédaction :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Privilégiez un raisonnement physique sur de longs calculs. Ici vous pouvez vous aider de l'article : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Arc-en-ciel>
- N'hésitez pas à me poser des questions sur les points qui vous posent problème, soit en fin de cours, soit par mail.

AUTOUR DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

La mécanique quantique a permis d'interpréter une observation expérimentale datant du début du siècle précédent : les énergies observables pour l'atome d'hydrogène sont quantifiées. Autrement dit, seul un ensemble discret d'énergies peuvent être observées :

$$E_n = -\frac{E_{\text{ref}}}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de la constante E_{ref} , qui caractérise l'atome d'hydrogène.

1. On rappelle que l'énergie d'un photon est donné par la formule $E = h\nu$ (ν est une fréquence). Déterminer la dimension de la constante de Planck h . Montrer qu'elle peut s'exprimer en J.s.
2. L'unité associée à une charge électrique q est le Coulomb (C) tel que $1 \text{ C} = 1 \text{ A.s}$. En déduire la dimension de q .
3. La force d'interaction électrostatique (aussi appelée force Coulombienne) entre deux particules de charges q_1 et q_2 s'exprime sous la forme :

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$$

où d représente la distance entre les deux particules, $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$ un vecteur unitaire et où ϵ_0 est une constante fondamentale appelée permittivité du vide. En déduire la dimension de ϵ_0 .

4. Un atome d'hydrogène se compose d'un proton de charge électrique e et d'un électron de charge électrique $-e$. On note $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Quelle est la dimension de k ?
5. On se propose maintenant d'établir une expression pour l'énergie E_{ref} de l'atome d'hydrogène. Une modélisation rapide permet d'identifier les paramètres dont elle dépend : k, h et m , la masse de l'électron :

$$E_{\text{ref}} = a \times m^\alpha k^\beta h^\gamma$$

où a désigne une constante de proportionnalité sans dimension.

Déterminer alors l'expression de E_{ref} par analyse dimensionnelle.

PRINCIPE DE L'ARC-EN-CIEL

A. Introduction

On considère une bille sphérique en verre, aluminisée sur sa face arrière (Figure 1).

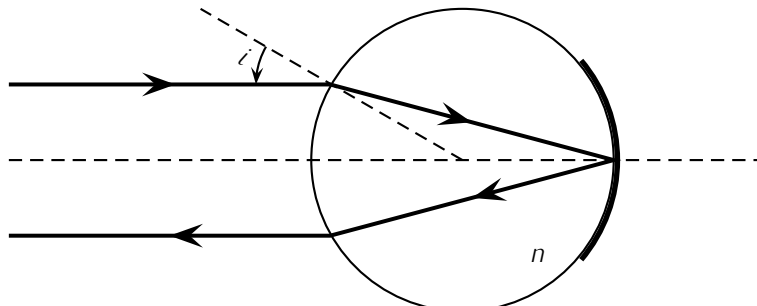


FIGURE 1 – Rétro-rélecteur sphérique

Déterminer l'indice de réfraction n du verre nécessaire pour que le système se comporte comme un rétro-rélecteur pour les rayons paraxiaux, c'est à dire tel que tout rayon rentrant dans la bille avec un angle d'incidence i faible ressorte parallèlement à lui-même après avoir subi une réfraction à l'entrée, une réflexion sur le fond et une réfraction à la sortie.

B. Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

I. Trajet des rayons dans une goutte d'eau sphérique.

On considère une goutte d'eau sphérique, de rayon R et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont définis Figure 2. Soit un rayon lumineux incident, situé à une hauteur h de l'axe de la goutte associée à l'angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit).

1. On note D_1 l'angle de déviation de ce rayon, à la sortie de la goutte d'eau, obtenu après une réflexion sur le fond de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte.

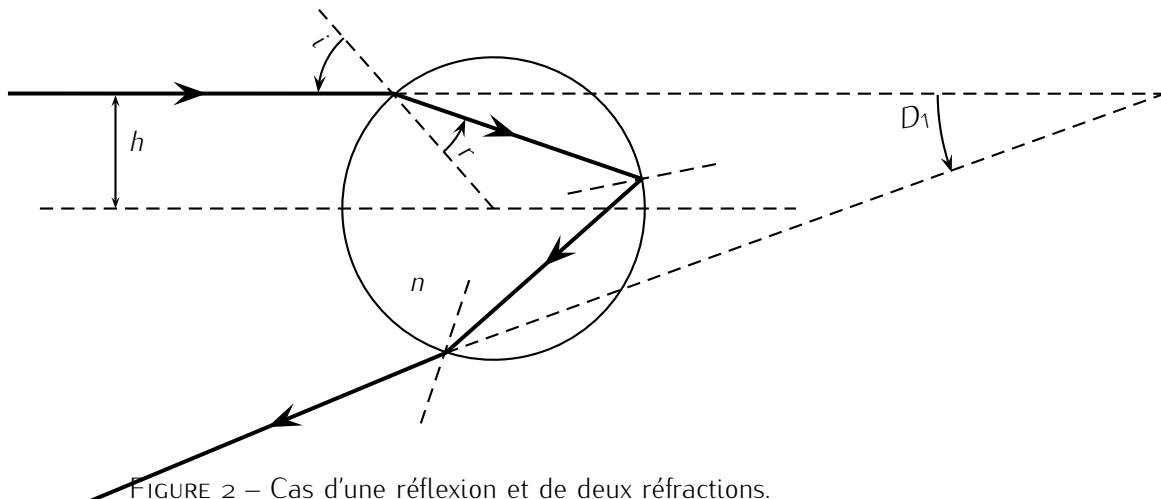


FIGURE 2 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

- (a) Etablir la relation : $D_1 = 4r - 2i$.
- (b) Exprimer l'angle D_1 en fonction de n et de $x = \frac{h}{R}$ ($0 < x < 1$).
- (c) Tracer l'allure de $D_1(x)$ dans le cas de l'eau, sachant que $n \simeq 1,337$.

- (d) Montrer que $D_1(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur $x = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$.

On donne la dérivée de la fonction arcsin :

$$\frac{d \arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (e) On note D_{1m} la valeur correspondante de D_1 .

Calculer x_m et D_{1m} (en degré) dans le cas de l'eau, sachant que $n \simeq 1,337$.

2. On considère maintenant un rayon lumineux qui subit deux réflexions à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (voir Figure 3).

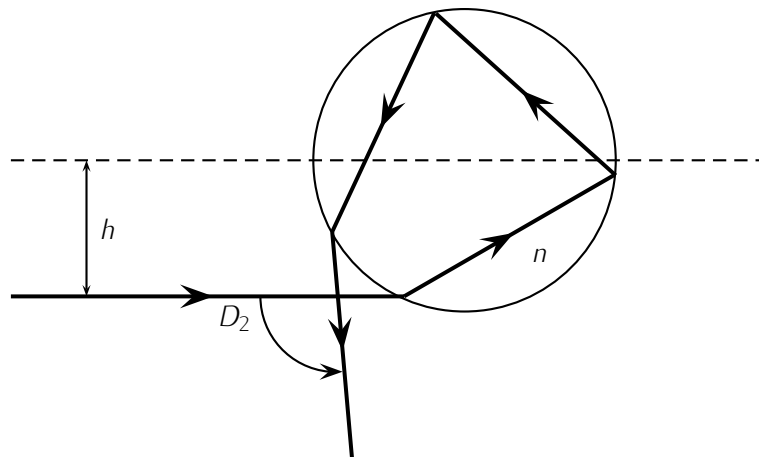


FIGURE 3 – Cas de deux réflexions et de deux réfractions.

- (a) Montrer que l'angle de déviation D_2 est donné par la relation $D_2 = \pi + 2i - 6r$ où i et r sont les mêmes qu'à la question précédente.
- (b) On admet que la fonction D_2 présente un extremum D_{2m} lorsque x varie.
Calculer numériquement en degré, toujours dans le cas de l'eau, cet extremum, sachant que la valeur correspondante de x vaut $\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$.

II. Caractéristiques de l'arc-en-ciel

Il s'agit ici de déduire les caractéristiques de l'arc-en-ciel, formé par la rétrodiffusion de la lumière solaire dans des gouttes d'eau sphériques des mécanismes présentés ci-dessus.

- Pourquoi voit-on un arc lumineux (dit arc primaire) et parfois un second d'intensité plus faible (dit arc secondaire) ?
- Sur un schéma, préciser les positions relatives du soleil, de la pluie et de l'observateur ?
- Quelles sont les rayons angulaires moyens des arcs ? L'arc secondaire est-il externe ou interne ? Justifier.
- Peut-on voir un arc-en-ciel primaire à Paris le 21 mars (équinoxe de printemps) à midi solaire c'est à dire lorsque le Soleil est au zénith de l'équateur ? On assimilera la latitude de Paris à 45° .
- Pourquoi voit-on des couleurs ? Préciser l'ordre des couleurs pour l'arc-en-ciel primaire ainsi que l'écart angulaire entre le violet ($\lambda = 400 \text{ nm}$, $n = 1,34356$) et le rouge ($\lambda = 700 \text{ nm}$, $n = 1,33052$).
- Le ciel est sombre entre les deux arcs primaire et secondaire : interpréter sans calcul.