Quelques idées sur les incertitudes

I Introduction

1 Vocabulaire

Definition 1.
- La grandeur que l'on veut mesurer est appelée le mesurande
- On appelle mesurage l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
- Une constatation expérimentale : deux mesures successives, même dans des circonstances identiques, ne donnent (quasiment) jamais le même résultat !
- Il y a une certaine **variabilité** inhérente au processus de mesurage.
- On prend en compte cette variabilité dans une modélisation du processus de mesurage en utilisant les outils probabilistes et statistiques.

Dans cette approche on abandonne la notion de valeur vraie M_{vrai} d'une grandeur, ainsi que celle d'erreur qui serait la différence entre la valeur mesurée m et la valeur vraie.

Definition 2. Le résultat d'une mesure c'est l'ensemble des valeurs raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée, complété par toute autre informations pertinente souhaitée.

Explicitons un peu cela plus formellement.

- Le résultat d'un mesure, un ensemble infini de valeurs, est décrit par un objet mathématique appelé variable aléatoire continue.
- Cette variable aléatoire X est caractérisée par une densité de probabilité f.
- La proportion des valeurs appartenant à un intervalle donné (proportion identifiée à une probabilité) est reliée à l'intégrale de la fonction f :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

- Une difficulté : la densité de probabilité qui modélise le résultat de la mesure n'est jamais connue avec certitude !
- Lorsqu'on en a besoin, on choisit des fonctions raisonnables en absence d'information complémentaire. Deux familles de fonctions sont les plus communément usitées :
  - une fonction constante sur un intervalle $[c-d, c+d]$, qui traduit l'hypothèse que les valeurs (raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée) sont uniformément réparties dans cet intervalle.
  - une fonction dite gaussienne, définie sur $\mathbb{R}$, qui traduit que les valeurs sont considérées comme réparties de manière symétrique autour de la valeur μ connue, et typiquement réparties à une distance σ de μ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- La valeur mesurée est par définition une valeur représentative de l'ensemble des valeurs raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée.
- En pratique, on n'a accès qu'à une unique valeur de l'ensemble : c'est donc elle qu'on choisit.
- La valeur mesurée caractérise l'ensemble des valeurs du résultat de mesure, elle en est représentative même si l'information associée à cette seule valeur mesurée demeure limitée.
- On la notera par la suite X_{mes}.
- Il faut maintenant prendre en compte la variabilité de la mesure !
- L'incertitude-type est par définition l'écart-type de l'ensemble des valeurs raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée.
- Avant même de définir l'écart-type d'une infinité de valeurs, on peut interpréter cette définition comme une évaluation de la dispersion du résultat de mesure.
- Schématiquement, on peut le comprendre comme une estimation de l'écart typique entre une valeur choisie au hasard et l'espérance de l'ensemble des valeurs.
  Soit
  $$\sigma = \sqrt{\int \left(x - \overline{X}\right)^2 f(x) \mathrm{d}x}, avec$$
  $$\overline{X} = \int x f(x) \mathrm{d}x,$$
  qui est l'espérance de X.
- On retrouve la difficulté précédente ! la connaissance de la densité de probabilité reste parcellaire. Une bonne partie du travail lié à la mesure consiste à **évaluer quand même l'incertitude-type**, en absence d'une information complète.
- On la note de manière standard $u(X)$ (u comme **u**ncertainty)..

II But de cette présentation

1 Résultats

Objectifs

- Savoir que le résultat d'un mesurage est un ensemble de valeurs que l'on peut raisonnablement associer à la grandeur
- Savoir que le résultat doit être présenté sous la forme $X = X_{mes} \pm u(X)$, unité avec une utilisation raisonnée des chiffres significatifs.
- On donnera quelques indications sur le calcul de $u(X)$.
- Dans les épreuves de TP de concours, vous devriez disposer de tableurs, de logiciels ou de python calculant $u(X)$ à partir de vos données pour vous, ou vous permettant de le calculer ou de le simuler par la méthode de Monte-Carlo.
- Savoir comparer le résultat d'une mesure à une valeur tabulée ou deux grandeurs mesurées entres-elles.

2 Les deux grandes familles

- Si on peut faire un traîtement statistique portant sur un nombre N de mesurages indépendants, on a à faire à une incertitude de type A.
- Dans les autres cas, et en particulier dans le cas d'une mesure unique, on a à faire à une incertitude de type B. C'est le cas le plus fréquent dans nos TP, on le présentera donc en premier.

III Incertitude de type B

1 Situation

Il s'agit du cas d'une mesure unique utilisant un appareil de mesure sur lequel il faut avoir quelques informations. En général la documentation donne une précision sous la forme :
$\pm(n$ U.R. (Unité de représentation) $+(p\%$ de la valeur lue))

Example 3. Valeur lue $10,041$ sur calibre $20\ V$. Précision : $\pm(2$ U.R. $+0,1\%)$, soit $\pm(2\ mV\ +10\ mV) = \pm 12\ mV$

Pour un appareil **analogique** (i.e. à aiguille) une **classe** C est indiquée. La précision est alors :
$C\%$ du calibre utilisé

Démarche

- On estime l'incertitude-type en divisant la précision obtenue par $\sqrt{3}$, soit $12/\sqrt{3} = 6,928\ mV$.
  La recommandation actuelle est de garder 2 C.S. si possible sur une incertitude à notre niveau ($6,9\ mV$), sinon on n'en garde qu'un seul ($6\ mV$, on ne fait pas d'arrondi).

Présentation du résultat

- Avec 2 C.S. $U = 10,041 \pm 0,0069,\ V$ est une écriture incohérente car le 9 porte sur un chiffre de la mesure qu'on ne connaît même pas !
- On ne garde donc ici que 1 C.S. $U = 10,041 \pm 0,006,\ V$
- Si l'affichage donnait plus de chiffres, par exemple $U = 10,0415$, on pourrait garder deux C.S. sur l'incertitude, soit $U = 10,0415 \pm 0,0069,\ V$.
- Si l'affichage donnait encore plus de chiffres, par exemple $U = 10,04157$, on pourrait également garder deux C.S. sur l'incertitude, mais il faudrait laisser tomber des chiffres de la valeur mesurée soit $U = 10,0415 \pm 0,0069,\ V$.

2 Manipulation sur incertitude de type B

$$R = ... \pm ....\Omega$$

IV Traitement statistique : incertitude de type A

1 Situation

Démarche

- Répétition de mesures indépendantes de la grandeur physique x
  On effectue un nombre fini N de mesures, de valeurs respectives $x_1, x_2, ..., x_N$. On cherche à extraire les meilleures estimations de la valeur mesurée X_{mes} et l'écart-type σ. En effet, X_{mes} et σ ne peuvent être connues que si la loi de probabilité de la variable aléatoire associée à la mesure était elle-même connue... ce qui ne peut être fait qu'à partir d'une infinité de mesures...

Démarche : estimateurs

On prendra pour

- la valeur mesurée X_{mes} : la moyenne des mesures

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

- l'écart-type : l'estimateur

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\sum_i^N \left(x_i - \overline{X}\right)^2\right)}$$

Demarche, suite

- L'incertitude-type sur la variable $X_{mes} = \overline{X}$ est alors

$$\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Conclusion

Si on réalise N mesures indépendantes de x, avec les résultats respectifs $x_1, x_2, ...x_N$, on écrira le résultat final sous la forme :

$$\overline{X} \pm \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$

où

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\sum_i^N \left(x_i - \overline{X}\right)^2\right)}$$

2 Manipulation sur incertitude de type A

Analyse collective des résultats

V Exploitation des mesures

1 Comparaison d'une mesure à une valeur tabulée

- Situation : on veut comparer le résultat d'un mesurage $(X_{mes}, u(X))$ à une valeur tabulée de référence X_{ref}.
- On calcule l'écart normalisé, ou $z_{\text{score}} = \dfrac{|X_{mes} - X_{ref}|}{u(X)}$.
- En physique classique ou pas trop spécialisée, si $z_{\text{score}} < 2$ on dit que les deux valeurs sont compatibles. Si $z_{\text{score}} > 2$, on dit que les deux valeurs ne sont pas compatibles.
- Dans certains domaines pointus de la physique on utilise d'autres valeurs que 2 écarts-types.
- Manipulations : vos mesures de résistance avec les deux multimètres sont-elles compatibles avec la valeur de référence du fabricant ?

2 Comparaison de deux mesures entre-elles

- Situation : on veut comparer le résultat de deux mesurages $(X_{1,mes}, u_1(X))$ et $(X_{2,mes}, u_2(X))$
- On calcule l'écart normalisé, ou $z_{\text{score}} = \dfrac{|X_{1,mes} - X_{2,mes}|}{\sqrt{u_1(X)^2 + u_2(X)^2}}$.
- Si $z_{\text{score}} < 2$ on dit que les deux valeurs sont compatibles. Si $z_{\text{score}} > 2$, on dit que les deux mesures ne sont pas compatibles.
- Manipulations : vos deux mesures de résistance avec les deux multimètres sont-elles compatibles entre-elles ?

VI Mesures indirecte : composition des incertitudes

1 Position du problème

Position du problème

La grandeur g étudiée ne peut-être mesurée directement.Mais on dispose d'une relation mathématique (dans le cadre d'un modèle physique) de la forme

$$q = f(x, y, ...)$$

qui permet d'exprimer la valeur q de g, en fonction des grandeurs x, y, ... supposées indépendantes.

On connaît la valeur expérimentale de chaque paramètre ainsi que leurs incertitudes-types σ_x, σ_y,...

Propagation des incertitudes

On a alors la formule dite de "propagation des incertitudes". On parle d'incertitude-type composée.

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + ...}$$

On peut alors calculer l'incertitude élargie comme précédemment, à partir de cette incertitude-type (composée) de q

2 Exemples

Example 4.

- Addition : $q = 2 * x + y + Cte$

$$\sigma_q = ...$$

- Multiplication $q = \frac{1}{2}xy^2$

$$\frac{\sigma_q}{q} = ...$$

3 Aide de l'informatique

- Pour éviter des calculs littéraux et numériques pénibles, il est préconisé de faire appel à l'informatique
- On va utiliser des simulations dites Monte-Carlo où l'on simule des mesures des grandeurs connues en exploitant leurs valeurs mesurées et leurs écart-types (en faisant des hypothèses raisonnables sur la loi de probabilité de chaque grandeur connue)..
- Pour chaque expérience simulée on calcule alors la grandeur calculée.
- On calcule alors la moyenne et l'écart-type de la grandeur calculée. On a donc la valeur mesurée et l'incertitude type correspondante !
- On utilise soit un tableur, soit un langage de programmation.
- On essaie...