

Chapitre(s) 0 : Packs de démarrage

correction partielle

2025-2026

Exercice 4 :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Réduire les expressions suivantes :

1. $A = x^{-1} \times \frac{x^7}{x^4}.$

2. $B = \frac{x^2}{(x-2)^3}.$

3. $C = \frac{x^{-2}y^3}{(xy^{-1})^3}.$

1. $A = x^2.$

2. $B = x^8.$

3. $C = \frac{y^6}{x^5}.$

Exercice 5 :

Réduire les expressions suivantes :

1. $A = 9^{n+2} - 9^{n+1} + 2 \times 3^{2n}.$

2. $B = \frac{2}{4^n} - 7 \times 2^{-2n-1} + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

3. $C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$

L'astuce est d'utiliser le fait que $a^{n+p} = a^n a^p$ et $a^{np} = (a^n)^p$, afin de factoriser le plus possible les expressions.

1.

$$\begin{aligned} A &= 9^n 9^2 - 9^n \times 9 + 2 \times 9^n \\ &= 9^n(81 - 9 + 2) \\ A &= 74 \times 9^n \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{4^n} - 7 \frac{1}{2^{2n+1}} + 5 \frac{1}{2^{2n}} \\ &= 2 \frac{1}{4^n} - 7 \frac{1}{4^n} \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{4^n} \left(2 - \frac{7}{2} + 5\right) \\ B &= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4^n} = \frac{7}{2 \times 4^n} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= (3^2)^n (-1)^n - (-1 \times 9)^n \\ &= 9^n (-1)^n - (-1)^n 9^n \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 8 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$1. \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 7x - y = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 3y = 3x \\ x - y = y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 4y - 4z = -8 \\ 3x + 9y - 6z = 9 \\ 4x + 17y - 11z = 41 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ -3x & +4y & +2z & = 5 \\ -2x & +3y & +z & = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 2 \\ 4x & +y & +z & = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ 4x & -y & -z & = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x & +y & +2z & = 4 \\ & y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases}$$

5.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ -3x & +4y & +2z & = 5 \\ -2x & +3y & +z & = 3 \end{cases} & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1] \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ y & +2z & & = 5 \\ y & +z & & = 3 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 - L_3] \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ y & +2z & & = 5 \\ z & & & = 2 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 2 \\ 4x & +y & +z & = 3 \end{cases} & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2, L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3] \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ 3y & -3z & & = -3 \\ y & -3z & & = -1 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 - 3L_3] \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ 3y & -3z & & = -3 \\ 6z & & & = 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = -1 \\ z & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ 4x & -y & -z & = 3 \end{cases} & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2, L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3] \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ 3y & +3z & & = -3 \\ 3y & +3z & & = -1 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ 3y & +3z & & = -3 \\ 0 & & & = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Système incompatible.

8.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x & +y & +2z & = 4 \\ & y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 8 \end{cases} & \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3] \begin{cases} x & +y & +2z & = 4 \\ & y & +2z & = 1 \\ 3y & +3z & & = 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3] \begin{cases} x & +y & +2z & = 4 \\ & y & +2z & = 1 \\ & +3z & = 3 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} x & = 3 \\ y & = -1 \\ z & = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

9. Ce système aura nécessairement une inconnue secondaire, puisqu'il n'y a que deux équations pour 3 inconnues.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases} & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2] \begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 7y + z = 16 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} x & = -23 + 13y \\ z & = 16 - 7y \\ y & \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 9 :

Soit $m \in \mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et en fonction de m les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $mx = m$.
2. $m(x+2) = (m+2)(2x-1)$.
3. $x^2 + 2mx + 1 = 0$.

La difficulté est qu'il faut prendre en compte le paramètre, sans le considérer comme une inconnue. Il ne s'agit pas de "trouver m ", mais de repérer les différentes situations possibles, en fonction des valeurs de m .

Pour cela, le principe est de considérer m comme un nombre, et d'être attentif aux opérations effectuées.

1. On a ici envie de diviser par m , ce qui n'est possible que si $m \neq 0$.
on a donc deux cas, et donc deux ensembles solutions possibles :

Si $m \neq 0$:

$$mx = m \Leftrightarrow x = 1$$

ainsi $S = \{1\}$

Si $m = 0$: L'équation devient $0x = 0$. Ainsi x est comme on veut

ainsi $S = \mathbb{R}$.

2. Ici, il faut bien considérer m comme une constante, et voir ensuite ce qu'il est possible de faire :
 $m(x+2) = (m+2)(2x-1) \Leftrightarrow mx + 2m = 2mx + 4x - m - 2 \Leftrightarrow mx + 4x = 3m + 2 \Leftrightarrow (m+4)x = 3m + 2$
A cette étape, on a envie de diviser par $m+4$, ce qui n'est possible que si $m \neq -4$.

Si $m \neq -4$ $(m+4)x = 3m + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3m+2}{m+4}$

Ainsi, $S = \left\{ \frac{3m+2}{m+4} \right\}$

(une seule solution, qui est fonction de m donc)

Si $m = -4$ $(m+4)x = 3m + 2 \Leftrightarrow 0 = -10$

Ainsi $S = \emptyset$

3. $x^2 + 2mx + 1 = 0$: c'est une équation algébrique du second ordre. On calcule le discriminant et on trouve $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$

Il y a cette fois-ci 3 cas, selon le signe de Δ , qui est donc du signe de $m^2 - 1$.

On peut voir directement que $m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$ ou alors chercher les racines (qui sont 1 et -1), ce qui donne donc :

Si $m \in]-1, 1[$ Alors $\Delta < 0$ et donc l'équation n'a pas de solution.

$S = \emptyset$.

Si $m = 1$ ou $m = -1$ Alors $\Delta = 0$, on a une unique solution : $x = \frac{-2m}{2} = -m$.

Ainsi $S = \{-m\}$ (une seule solution, qui dépend de m : $S = \{-1\}$ dans le cas $m = 1$, $S = \{1\}$ dans le cas $m = -1$)

Si $m \leq -1$ ou $m \geq 1$ Alors $\Delta \geq 0$. On obtient deux solutions : $x = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 - 4}}{2} = -m + \sqrt{m^2 - 1}$

ou $x = -m - \sqrt{m^2 - 1}$

Ainsi $S = \{-m + \sqrt{m^2 - 1}; -m - \sqrt{m^2 - 1}\}$: Deux solutions (qui dépendent de m).

Exercice 10 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$1. \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 3 \\ u + 3v = 5 \\ u - 4v = -2 \end{cases}$$

2. en fonction du réel λ , résoudre

$$\begin{cases} -x - 2y = \lambda x \\ 3x + 4y = \lambda y \end{cases}$$

1. Avec les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 = L_4 - L_1$, $L_5 \leftarrow L_1 - L_5$ pour enlever les u , puis $L_3 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_4 \leftarrow 3L_1 - L_4$, $L_5 \leftarrow 4L_2 - L_5$, on arrive au trois dernières lignes qui sont quasi identiques. la fin du pivot de Gauss donnerait des $0 = 0$, et donc un système compatible.

$$\begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 3 \\ u + 3v = 5 \\ u - 4v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ v - w = 2 \\ 3v - w = 4 \\ 4v + w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ 2w = -2 \\ 4w = -4 \\ 3w = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \\ w = -1 \end{cases}$$

Ainsi $S = \{(2; 1; -1)\}$.

2. On commence par ranger le système :

$$\begin{cases} -x - 2y = \lambda x \\ 3x + 4y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ 3x + (4 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Pour enlever le $3x$ de la seconde ligne, l'opération à faire serait $L_2 \leftarrow (-1 - \lambda)L_2 - 3L_1$

Or une telle opération est interdite si $-1 - \lambda = 0$, c'est à dire si $\lambda = -1$.

Cela nous donne donc un premier cas à traiter :

si $\lambda \neq -1$ $L_2 \leftarrow (-1 - \lambda)L_2 - 3L_1$ donne

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ 3x + (4 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ ((4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6)y = 0 \end{cases}$$

Or $(4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.

Pour avoir y , on veut diviser par cette quantité, or $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ (solutions évidentes).

Cela donne donc encore des cas :

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$ (toujours avec $\lambda \neq -1$)

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ ((4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi $S = \{(0; 0)\}$ (un seul couple solution)

Si $\lambda = 1$

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ ((4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ainsi $S = \{(-y; y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1; 1), y \in \mathbb{R}\}$

Une infinité de solutions (en fait, une droite, qui passe par l'origine et de vecteur directeur $(-1; 1)$.)

Si $\lambda = 2$

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ ((4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ainsi $S = \{(-\frac{2}{3}y; y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-\frac{2}{3}; 1), y \in \mathbb{R}\}$

Une infinité de solutions (en fait, une droite, qui passe par l'origine et de vecteur directeur $(-\frac{2}{3}; 1)$, ou $(-2; 3)$)

Si $\lambda = -1$ Il faut repartir du tout premier système après le rangement puisque dès la première opération, on avait supposé $\lambda \neq -1$:

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ 3x + (4 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$