Homogénéité

Exercice 1 : Homogénéité en mécanique

La grandeur F représente une force, L une longueur, v une vitesse, a une accélération, T un temps, m une masse. Les formules suivantes sont-elles homogènes ?
$F = \frac{mv^2}{5L}$; $v = \sqrt{2gL}$; $v = \sqrt{2gL}$; $T = 2La$; $T = \sqrt{2La}$; $T = \sqrt{\frac{2L}{a}}$.
Correction faite en classe.

Exercice 2 : Chute d'un flocon de neige

On s'intéresse à la chute dans l'air d'un flocon de neige, supposé sphérique, de rayon $r = 0{,}5$ mm et de masse volumique μ. La viscosité de l'air est η, sa masse volumique μ_a. On suppose ces grandeurs constantes. Du fait de la viscosité de l'air, le flocon est soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse v :$F = -6\pi r\eta v$ (force de Stockes). On peut considérer, qu'une fois formé dans le nuage, le flocon commence son mouvement de chute sans vitesse initiale. Quelle est la dimension de la viscosité η de l'air.

$$[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$$

Exercice 3 : Homogénéité de formules classiques

1. En statique des fluides, on démontre : $p_2 - p_1 = \rho g(z_2 - z_1)$ avec, p_1 , p_2 la pression en 2 points, ρ la masse volumique, z_1 , z_2 deux altitudes. Vérifier l'homogénéité de cette formule.
2. Sachant que la fréquence d'une corde vibrante est liée à sa longueur l , à sa tension F , à sa masse linéique μ par une relation du type : $f = Kl^\alpha F^\beta \mu^\gamma$, avec K une constante : déterminer $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ par des considérations d'homogénéité.
3. Vérifier l'homogénéité de la formule de la théorie cinétique des gaz :$p = \frac{1}{3}nmu^2$ où p est la pression du gaz , n le nombre de molécules par unité de volume, m la masse des molécules et u leur vitesse efficace.
4. Un corps, de masse m , qui tombe en chute libre d'une hauteur h acquiert la vitesse $v = km^\alpha h^\beta g^\gamma$. Déterminer $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Correction faite en classe.

Exercice 4 : Intérêt de l'analyse dimensionnelle

L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ où ω désigne la vitesse de rotation du solide en rad.s^{-1}.

1. Quelle est la dimension du moment d'inertie J ?
2. Un élève propose pour formule du moment cinétique de la sphère $J = \frac{5}{2}m^2R$ avec m la masse du solide et R son rayon. Est-ce raisonnable ?
3. Le même élève a trouvé comme résultat du problème de mécanique que l'accélération a du solide était : $a = \frac{(M\sin\alpha - m)g}{M+m+J/R^2}$, où M et m désignent des masses et g l'accélération de la pesanteur. Est-ce raisonnable du point de vue de l'homogénéité ?

1. J est en ML^2
2. non homogène
3. homogène

Exercice 5 : Vitesse des ondes sonores

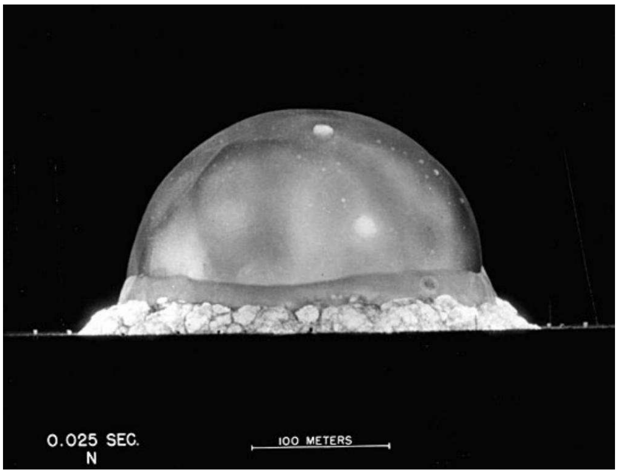
La vitesse de propagation du son s'exprime en fonction de $\chi = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp}$, un coefficient de compressibilité du gaz (où v désigne le volume massique et p la pression) et de sa masse volumique μ.

1. Déterminer la dimension de χ.
2. Donner l'expression de la vitesse à une constante près.

1. $[\chi] = M^{-1}.L.T^2$
2. $v = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}$

Exercice 6 : Energie d'une explosion nucléaire

Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet était classées ultra-secrètes par la CIA. La légende raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor[1] (1886-1975) aurait pu en 1950 à l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, estimer l'énergie E dégagée par cette explosion nucléaire.
Le raisonnement est le suivant : le film permet d'avoir accès à l'évolution $R(t)$ du rayon du nuage formé par l'explosion au cours du temps. Les paramètres influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie E, et la masse volumique de l'air ρ



1. On cherche alors R, sous la forme : $R = E^a t^b \rho^c$. Déterminer a, b et c.
2. Déduire de la question précédente l'expression de l'énergie libérée en fonction de R, ρ et t.
3. Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie.
4. Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT. Sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ 4.10^6 J, calculer l'énergie libérée par l'explosion Trinity et commenter la qualité du résultat obtenu par analyse dimensionnelle

Correction faite en classe.

1. Il est notamment connu pour ses travaux sur la turbulence et les phénomènes non-linéaires. Je vous suggère de consulter sur wikipedia les articles concernant : l'instabilité de Rayleigh-Taylor, l'instabilité de Taylor-Couette, le nombre de Taylor ou encore le cône de Taylor.

Exercice 7 : Dino Vs Chat-GPT5

On donne l'énoncé suivant à Chat-GPT. L'objectif est de contrôler et éventuellement de corriger sa réponse. On pressent que la vitesse de marche V d'un animal dépend de sa masse m, de la longueur de ses jambes L_J, de la longueur d'une enjambée L_E et de l'accélération de la pesanteur g. On cherche donc V sous la forme :

$$V = km^\alpha L_J^\beta L_E^\gamma g^\delta,$$

où k, α, β, γ et δ sont des constantes sans dimension.

1. Quelle est la dimension de g ? En quelle unité du système international s'exprime-t-elle ?
2. En utilisant l'analyse dimensionnelle, calculer α et δ.
3. La vitesse de la marche dépend-elle de la masse du dinosaure ?
4. En utilisant l'analyse dimensionnelle, exprimer γ en fonction de β.
5. En déduire que :
$$V = k\left(\frac{L_J}{L_E}\right)^\beta \sqrt{g}\sqrt{L_E}.$$
On trouve des traces de pas fossiles d'un dinosaure. Le diamètre du pied est de 0.95 m et l'enjambée L_E de 2.20 m. On sait par ailleurs que pour tous les animaux, la longueur des jambes L_J est environ 4 fois le diamètre des pieds.
6. Calculer le rapport des longueurs $\frac{L_J}{L_E}$ pour ce dinosaure.
7. Sachant que la longueur de la jambe d'un homme est d'environ $L_J = 85\,\mathrm{cm}$, quelle est la valeur d'une enjambée humaine donnant le même rapport $\frac{L_J}{L_E}$ que celui du dinosaure ?
8. Donner une estimation raisonnable de la vitesse à laquelle marcherait un homme avec une telle enjambée.
9. En déduire une valeur approximative de la vitesse de marche du dinosaure (on donnera la formule littérale et on effectuera l'application numérique).
10. Commenter la valeur trouvée.

Correction proposée - Exercice 7 : Marche des dinosaures

On suppose

$$V = k\, m^\alpha L_J^\beta L_E^\gamma g^\delta, \qquad [V] = LT^{-1},\ [m] = M,\ [L_J] = L,\ [L_E] = L,\ [g] = LT^{-1}.$$

1) La dimension de g est $[g] = LT^{-1}$, donc l'unité SI est m.s^{-1}.

2) Équations d'homogénéité.
Masse : $M^\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.
Temps : $T^{-1} = T^{-2\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}$.
Longueur : $L^1 = L^{\beta+\gamma+\delta} \Rightarrow \beta + \gamma + \delta = 1 \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{1}{2}$.

3) Comme $\alpha = \frac{1}{2}$, la vitesse dépend de la masse : $V \propto \sqrt{m}$.

4) On tire γ en fonction de β :

$$\beta + \gamma = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \gamma = \tfrac{1}{2} - \beta.$$

5) En réinjectant, on peut écrire
$$V = k\left(\frac{L_J}{L_E}\right)^{\beta}\sqrt{g\,L_E}.$$

6) Données fossiles : diamètre du pied = 0,95 m, donc $L_J \simeq 4\times 0{,}95 = 3{,}80$ m, et $L_E = 2{,}20$ m.
Le rapport vaut
$$\frac{L_J}{L_E} \approx \frac{3{,}80}{2{,}20} \approx 1{,}45.$$

7) Pour un humain ($L_J = 0{,}85$ m) avec le même rapport $r = L_J/L_E$, on a $L_E^{(\mathrm{hum})} = L_J/r$.
Donc
$$L_E^{(\mathrm{hum})} \approx \frac{0{,}85}{1{,}45} \approx 0{,}59\,\mathrm{m}.$$

8) Estimation de la vitesse humaine avec cette enjambée.
En prenant $k = 1$ et $\beta = 1$ à titre d'approximation,
$$V_{\mathrm{hum}} \approx \left(\frac{L_J}{L_E}\right)\sqrt{g\,L_E} \approx 1{,}45\times\sqrt{9{,}81\times 0{,}59} \approx 1{,}45\times 2{,}41 \approx 3{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}}\ (\approx 12{,}6\,\mathrm{km.h^{-1}}),$$
ce qui correspond à une marche soutenue.

9) Vitesse du dinosaure (même choix de k et β). Avec $L_E = 2{,}20$ m :
$$V_{\mathrm{dino}} \approx \left(\frac{L_J}{L_E}\right)\sqrt{g\,L_E} \approx 1{,}45\times\sqrt{9{,}81\times 2{,}20} \approx 1{,}45\times 4{,}65 \approx 6{,}7\,\mathrm{m.s^{-1}}\ (\approx 24\,\mathrm{km.h^{-1}}).$$

10) Commentaire. La valeur obtenue semble cohérente pour une locomotion pédestre rapide ; la dépendance en $\sqrt{m}$ explique que les grands animaux puissent conserver des vitesses comparables malgré leur masse.
Correction faite en classe.