

DM1 - Pack de démarrage

2025-2026



Exercice 1 :

1. Soient a et b deux réels non nuls. Le raisonnement suivant est-il valable ?

$$\text{si } a \geq 4 \text{ et } b \geq 4, \text{ alors } \frac{a}{b} \geq \frac{4}{4}, \text{ donc } \frac{a}{b} \geq 1$$

(quelle que soit votre réponse, on la justifiera !)

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$.

a) Montrez que si $x \geq 1$, alors $f(x) \geq 1$.

b) Pour tout $x \geq 1$, déterminez le signe de $f(x) - x$ et résolvez l'équation $f(x) = x$ sur $[1, +\infty[$.

1. Cette affirmation est fausse (bien que ce soit tentant...) : on ne peut pas diviser des inégalités.

Un contre exemple serait $a = 4$ et $b = 8$. On a bien $a \geq 4$ et $b \geq 4$ mais $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < 1$.

2. a) Le raisonnement suivant est faux :

Si $x \geq 1$, alors $3x \geq 3$ et donc $3x + 1 \geq 4$. Et de même si $x \geq 1$, alors $x + 3 \geq 4$ et donc

$$\frac{3x+1}{x+3} \geq \frac{4}{4} = 1$$

Mais on vient de dire que raisonner comme ça était incorrect !

Voici un raisonnement correct : remarquons déjà que si $x \geq 1$, $f(x)$ est défini. Calculons $f(x) - 1$:

$$f(x) - 1 = \frac{3x+1}{x+3} - 1 = \frac{3x+1 - (x+3)}{x+3} = \frac{2x-2}{x+3}$$

Comme $x \geq 1$, on a $2x - 2 \geq 0$, et on a également $x + 3 \geq 0$. Ainsi, $f(x) - 1 \geq 0$ par quotient de nombres positifs.

On a donc bien $\boxed{f(x) \geq 1}$

Remarque : On peut aussi, pour les plus courageux, étudier les variations de f en dérivant et en remarquant que $f(1) = 1$ est un minimum sur $[1, +\infty[$.

- b) Essayons de factoriser $f(x) - x$ pour en déterminer son signe :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{3x+1}{x+3} - 1 \\ &= \frac{3x+1 - x(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{-x^2+1}{x+3} \end{aligned}$$

Pour $x \geq 1$, $x + 3 \geq 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $-x^2 + 1$. Ce polynôme admet deux racines : 1 et -1 et il est négatif à l'extérieur des racines. Ainsi

$$\boxed{\text{pour } x \geq 1, f(x) - x \leq 0}$$

Enfin, résoudre l'équation $f(x) = x$ équivaut à résoudre $f(x) - x = 0$. D'après ce qu'on vient de faire, c'est équivalent à $-x^2 + 1 = 0$ et donc, en se rappelant que l'énoncé demande de résoudre sur $[1, +\infty[$:

$$\boxed{\text{pour } x \geq 1, f(x) = x \Leftrightarrow x = 1}$$



Exercice 2 :

On rappelle la propriété suivante :

Si $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors :

$$A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$$

1. Soit l'équation (E) :

$$(E) : \sqrt{3x-5} = x-3$$

a) Déterminez l'ensemble de définition de (E)

- b) Si x est solution de (E) , que dire de $x - 3$? En déduire un ensemble de résolution où on pourra appliquer la propriété rappelée.
c) Résoudre l'équation.

1. a) (E) est défini si et seulement $\sqrt{3x - 5}$ est défini, c'est à dire si et seulement si $3x - 5 \geq 0$.
Ainsi, l'ensemble de définition de l'équation est $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$
- b) Si x est solution de (E) , alors $x - 3 \geq 0$ puisque $x - 3$ est égale à une racine carrée (et que la fonction racine carrée est à valeur dans $\mathbb{R}_+$).
Ainsi, il est inutile de chercher des solutions pour $x < 3$ et cela donne comme ensemble de résolution $[3, +\infty[$.
Sur cet ensemble, les deux membres de l'équation sont positifs, ce qui permet d'appliquer le rappel.
- c) Sur l'ensemble $[3, +\infty[$, les deux membres de l'équation sont positifs : on peut donc élever au carré en conservant l'équivalence :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x - 5} = x - 3 &\Leftrightarrow 3x - 5 = x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0\end{aligned}$$

On observe que 2 est racine évidente, ce qui fait que la deuxième est 7 (ou alors on calcule le discriminant). Comme $2 \notin [3, +\infty[$, on en déduit

$$\boxed{\sqrt{3x - 5} = x - 3 \Leftrightarrow x = 7}$$

Remarque : cet exemple est **très important**, car si on ne prend pas le temps de réduire l'ensemble de résolution en observant qu'il ne peut pas avoir $x < 3$, et si on avait élevé au carré sans précaution, on se serait retrouvé avec une solution en plus : $x = 2$. Or si on remplace par $x = 2$ dans l'équation, on obtient $\sqrt{1} = -1$ ce qui est bien sûr faux !



Exercice 3 :

On rappelle qu'une fonction paire est une fonction vérifiant $f(-x) = f(x)$ pour tout x de son ensemble de définition. Elle est dite impaire si elle vérifie $f(-x) = -f(x)$.

Déterminez (en le justifiant) l'ensemble de définition et étudiez la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
3. Version "défi" : $f_3 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

1. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} > 0$, on a $e^{2x} + 1 > 0$ et donc le dénominateur ne s'annule jamais.
Par conséquent f_1 est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}f_1(-x) &= \frac{e^{(-x)^2} - 1}{e^{(-x)^2} + 1} \\ &= \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1} \\ f_1(-x) &= f_1(x)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f_1 \text{ est paire.}}$

2. $f_3(x)$ est défini si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$ et $x \neq 1$

A l'aide d'un tableau de signe, on obtient $x \in]-1, 1[$ qui est donc notre ensemble de définition.
De plus, $\forall x \in]-1, 1[$, on a

$$f_2(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f_2(x)$$

et donc $\boxed{f_2 \text{ est impaire}}$

3. $f_3(x)$ est défini si et seulement si $x^2 + 1 \geq 0$ et $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus, si $x \geq 0$, par somme de nombre positif, on a $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$.

Enfin, si $x < 0$, on a $-x > 0$ et on va pouvoir élever au carré dans les inégalités ci dessous (puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \geq -x \\&\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq (-x)^2 \\&\Leftrightarrow 1 \geq 0\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x < 0$ on a $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$.

Dans tous les cas, on a donc $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$ et fonction f_3 est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Observons déjà que $f_3(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$. Pour relier à $f_3(x)$, il faut un peu d'astuce et se rappeler que $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$. Ainsi :

$$f_3(-x) = -\ln\left(\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

Or $\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 1}}{(-x - \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1})}$ (on dit qu'on a multiplié par l'**expression conjuguée**)

$$\text{C'est à dire } \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - (x^2 + 1)} = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 1}}{-1} = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Finalement,

$$f_3(-x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f_3(x)$$

Et donc la fonction f_3 est impaire.



Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrez par récurrence que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Posons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons par récurrence (simple) que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (remarquons que l'énoncé proposait $n \in \mathbb{N}$, ce qui est une semi coquille : pour $n = 0$, cela correspondrait à une somme vide, c'est à dire 0)

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Alors

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\&= (n+1)^2\left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) \\&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule proposée est vraie.