
RAPPELS ET COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercices

[1] Noyau, image et rang d'une matrice

Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

[2] Matrices stochastiques

Soit n un entier naturel non nul.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est *stochastique* lorsque :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

1. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer l'équivalence :

$$AU = U \iff \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

2. Soit A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que leur produit AB est une matrice stochastique.
-

[3] Matrices à diagonales strictement dominantes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$. On note $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq \|X\|_\infty \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$.

2. On suppose que A est à *diagonale strictement dominante* c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

Montrer que la matrice A est inversible.

[4] Autour de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $\text{tr}(A^\top A) = 0$ alors $A = 0$.
2. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.

5 Matrices de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{rg}(A) = 1$.

1. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .

Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\ell_j \in \mathbb{K}$ tel que $C_j = \ell_j C_i$.

En déduire qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, C et L non nulles, telles que $A = CL$.

2. Montrer que $LC = \text{tr}(A)$ et en déduire que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

6 Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à travers lesquelles le produit matriciel commute

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

Soit $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.

2. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, f(AB) = f(BA).$$

(a) Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a $f(E_{i,j}) = 0$ et $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$.

(b) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f = a \text{tr}$ où tr désigne l'application trace.

7 Calculs de déterminants

Calculer les déterminants suivants en essayant de limiter les calculs. Les paramètres sont des réels.

Les deux derniers déterminants sont de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer le déterminant tridiagonal Δ_n , on pourra montrer que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix} \text{ où } j = e^{2i\pi/3} \quad B = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n]}$$

8 Exemple de déterminant d'une matrice à coefficients polynômiaux

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $A(x)$ la matrice carrée d'ordre n dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.

2. Application : Soit a et b deux réels distincts. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Déterminer la valeur du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix}$$

9 Matrices-blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.
 2. Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est et déterminer B^{-1} en fonction de A^{-1} .
 3. Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
-

10 Matrices-blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $ac \neq 0$.

On note $P = \left(\begin{array}{c|c} aM & bM \\ \hline cM & dM \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

En écrivant P comme le produit de deux matrices, calculer le déterminant de P .

11 Révisions sur les sous-espaces vectoriels

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et préciser leur dimension.

$$A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}, \quad C = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\} \\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

12 Supplémentarité de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = M\} \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = -M\}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer leurs dimensions.
 2. On note p la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et s la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Déterminer $p(M)$ et $s(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
-

13 Condition nécessaire et suffisante pour avoir $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ supplémentaires

Soit f un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2) \Leftrightarrow E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

14 Détermination d'un supplémentaire

Soit A un polynôme non nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X], A \text{ divise } P\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer un supplémentaire.

Indication : On pourra penser à utiliser la division euclidienne.

15 $\text{Im}(f)$ isomorphe à tout supplémentaire du noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire du noyau.

16 *Supplémentaire commun*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
 2. En déduire que $F \cup G = E$ si et seulement si $F = E$ ou $G = E$.
 3. Démontrer alors que $\dim F = \dim G$ si et seulement si F et G ont un supplémentaire commun (on pourra raisonner par récurrence sur $\text{codim} F = n - \dim F$).
-

17 *Décomposition de E comme somme directe de trois sous-espaces vectoriels*

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}_E$.

Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on pose $F_k = \text{Ker}(f - j^k \text{Id}_E)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Montrer que $E = \bigoplus_{k=0}^2 F_k$.

En supposant de plus que E est de dimension finie, donner la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

18 *L'opérateur de différence*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = P(X+1) - P(X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

1. Écrire la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. (a) Soit $P \in \text{Ker}(f)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
(b) En déduire $\text{Ker}(f)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le noyau et l'image de f_n .
(b) En déduire que f est surjectif.
4. (a) Trouver tous les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
(b) En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^n k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. On pose $H_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k = \frac{1}{k!} X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(H_k) = H_{k-1}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Déterminer la matrice de f_n dans la base $(H_0, \dots, H_n)$.
(c) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^n [f^k(P)](0) H_k.$$

19 *Problème des moments*

Soit X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé (Ω, P) telle que :

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ (les } x_i \text{ étant des réels deux à deux distincts).}$$

Soit $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(X^k) = m_k$.

Comment peut-on déterminer la loi de X ?

Application : En utilisant cette méthode, déterminer la loi de la variable aléatoire Y qui vérifie :

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}, E(Y) = 1 \text{ et } E(Y^2) = \frac{5}{3}.$$

20 Preuve du déterminant de Vandermonde par les matrices de passage

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, deux à deux distincts.

On note $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ le déterminant de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite prouver par une autre démonstration que celle vue en cours que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

On considère les trois bases de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ suivantes :

- ▶ $\mathcal{B} = (1, \dots, X^{n-1})$ la base canonique,
- ▶ $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$,
- ▶ $\mathcal{B}'' = (1, X - x_1, (X - x_1)(X - x_2), \dots, (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-1}))$.

Exprimer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ en fonction de celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.

Conclure.

21 Matrices semblables

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrer que les matrices A et B sont semblables.

Expliciter $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

22 Matrices semblables

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les matrices A_a et B_a sont semblables :

$$A_a = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \text{ et } B_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

23 Matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $2r \leq n$.

On pourra commencer par étudier le cas $n = 3$.

24 Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose de démontrer le résultat suivant :

« deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et un élément P de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

1. Montrer qu'il existe R et J éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $P = R + iJ$ avec $i^2 = -1$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$.
3. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0J) \neq 0$.
4. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

25 Trace d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(M) = AM$.

Calculer $\text{tr}(f)$ en fonction de $\text{tr}(A)$.

26 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Un endomorphisme u de E est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le plus petit entier p tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé *indice de nilpotence* de u .

On considère ici un endomorphisme u de E nilpotent et non nul, d'indice de nilpotence p .

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \text{Ker}(u^{p-1})$.
Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.
2. En déduire qu'on a $p \leq n$, $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\text{rg}(u) \geq p - 1$.

On suppose désormais que $p = n$.

3. Montrer que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
4. (a) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v$.

Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0)$.

En posant $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, montrer qu'on a $v = P(u)$.

- (b) En déduire que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec u sont les polynômes en u .
5. Déterminer $\text{tr}(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

27 Somme directe de sous-espaces vectoriels, égale à E

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E tels que $\sum_{i=1}^m p_i = \text{Id}_E$.

Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$. *Indication* : On pourra utiliser la trace.

28 Matrices de trace nulle

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in E$ non nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
 - (b) Comparer λ_x et λ_y pour x et y deux vecteurs non nuls.
On pourra considérer les cas : la famille (x, y) est liée et la famille (x, y) est libre.
 - (c) En déduire que f est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des 0 sur la diagonale.
On pourra raisonner par récurrence sur n .

29 Sous-espaces stables de $\mathbb{K}[X]$ par l'opérateur de dérivation

On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D .
 - (a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tel que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
 - (b) Montrer que la famille $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de F .
 - (c) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.
3. Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D .

30 *Drapeau d'un espace vectoriel*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

On appelle *drapeau* de E toute suite finie $(E_0, E_1, \dots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels de E , strictement croissante, commençant par l'espace nul et terminant par E , c'est-à-dire telle que :

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_{p-1} \subsetneq E_p = E$$

Soit φ un endomorphisme de E .

Montrer qu'il existe un drapeau de E composé de sous-espaces vectoriels tous stables par φ si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est triangulaire par blocs.

31 *Nilespace et cœur*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

On pose :

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im}(u^p)$$

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \text{Ker}(u^n)$ et $C = \text{Im}(u^n)$.
 2. Établir que N et C sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , stables par u et tels que les endomorphismes induits $u|_N$ et $u|_C$ soient respectivement nilpotent et bijectif.
 3. Réciproquement, on suppose $E = F \oplus G$ avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les endomorphismes induits u_F et u_G soient respectivement nilpotent et bijectif. Établir $F = N$ et $G = C$.
-

32 *Existence d'un polynôme annulateur non nul en dimension finie*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que la famille $(\text{Id}_E, u, \dots, u^p)$ soit liée.

En déduire que u possède un polynôme annulateur non nul.

33 *Recherche de polynômes annulateurs*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J .
2. Déterminer un polynôme annulateur non nul de l'endomorphisme :

$$u : \begin{matrix} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ par :

$$v(e_1) = e_2 \quad v(e_2) = 0 \quad v(e_3) = e_3.$$

Déterminer un polynôme annulateur non nul de v .

34 *Polynôme annulateur d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}).$$

On suppose que P est un polynôme annulateur de A et Q est un polynôme annulateur de B . Déterminer un polynôme annulateur de M .

35 *Calcul de u^{-1} et u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $P = (X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de u .

1. Montrer que u est un automorphisme de E et donner une expression de u^{-1} comme combinaison linéaire de Id_E et u .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de u^n comme combinaison linéaire de Id_E et u .