Corrigé du EH 1

Exercice 8 : Théorème de Lagrange

1. • Soit $x \in G$, $xx^{-1} = e \in H$ car H est un sous-groupe de G ; donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

- Soit $x, y \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$;
  donc : $xy^{-1} \in H$, or H est un sous-groupe de G,
  donc : $(xy^{-1})^{-1} \in H$,
  donc : $yx^{-1} \in H$.
  Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
- Soit $x, y, z \in H$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$;
  donc : $xy^{-1} \in H$ et $y^{-1}z \in H$,
  donc : $(xy^{-1}) \times (yz^{-1}) \in H$,
  donc : $xz^{-1} \in H$.
  Donc : $\mathcal{R}$ est transitive.

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

2. Soit $y \in G$,

$$\begin{aligned} y\mathcal{R}x &\Leftrightarrow yx^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H \mid yx^{-1} = h \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H \mid y = hx \\ &\Leftrightarrow y \in Hx \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{Hx \text{ est la classe d'équivalence de } x \text{ pour la relation d'équivalence } \mathcal{R}.}$$

3. Pour tout $h \in H, hx \in Hx$, donc f est bien définie de H dans Hx et pour $(h, k) \in H \times Hx$

$$\begin{aligned} f(h) = k &\Leftrightarrow hx = k \\ &\Leftrightarrow h = kx^{-1} \end{aligned}$$

et pour tout $k \in Hx$, il existe $k' \in H$ tel que $k = k'x$, donc $kx^{-1} = k' \in H$ (on vérifie que l'antécédent trouvé est bien dans H).

$$\boxed{f \text{ est bijective de } H \text{ dans } Hx.}$$

4. Soit $x \in G$, d'après la question précédente, Hx est en bijection avec H, donc : la classe d'équivalence de x (c'est à dire Hx) a le même cardinal que H. Ceci est valable pour tout $x \in G$, donc :

$$\boxed{\text{toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal.}}$$

5. On sait que les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ réalisent une partition de G, or G est un ensemble fini. Donc le cardinal de G est la somme des cardinaux des classes d'équivalence.
De plus, d'après la question précédente, toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal : $\operatorname{Card} H$; donc en notant α le nombre de classes d'équivalence, $n = \alpha \times \operatorname{Card} H$.
Donc :

$$\boxed{\operatorname{Card} H \mid n.}$$

6. Soit $x \in G$, l'ordre de x est : $\operatorname{Card}(\operatorname{gr}(x))$ et $\operatorname{gr}(x)$ est un sous-groupe de G, donc d'après la question précédente : $\operatorname{Card}(\operatorname{gr}(x)) \mid n$. Donc :

$$\boxed{\text{l'ordre de tout élément de } G \text{ divise le cardinal de } G.}$$

Exercice 10

Montrons que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes :
soit $(x, y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
donc : $4 \cdot (x, y) = (4 \cdot x, 4 \cdot y) = (\bar{0}, \bar{0})$. Donc l'ordre de tout élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ divise 4. Donc il n'existe pas d'élément d'ordre 8 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: ce groupe n'est pas cyclique.
Or $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est cyclique, donc :

$$\boxed{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ ne sont pas isomorphes.}}$$