Citer deux manières de ramener l'étude d'une série de termes complexes à l'étude de séries de termes réels.

Séries numériques

On suppose que la série $\sum u_n$ est à termes positifs.

On note (S_n) la suite de ses sommes partielles.
À quelle condition nécessaire et suffisante la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

On suppose que la série $\sum u_n$ diverge.
Que peut-on en déduire sur la suite (S_n) ?

Donner l'idée de la preuve.

Séries numériques

On veut étudier la nature de la série $\sum u_n$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$.

Comment peut-on se ramener à l'étude d'une série à termes positifs ?

Séries numériques

- Utiliser l'équivalence :
  $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \underbrace{\mathrm{Re}(u_n)}_{\in\mathbb{R}}$ et $\sum \underbrace{\mathrm{Im}(u_n)}_{\in\mathbb{R}}$ convergent.
- Étudier la convergence absolue.

  Si $\sum \underbrace{|u_n|}_{\in\mathbb{R}_+}$ converge alors $\sum u_n$ converge.
  Cela ne permet pas de conclure dans le cas où la série ne converge pas absolument.

Comme il s'agit d'une série *à termes positifs*, on a l'équivalence :

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } (S_n) \text{ est majorée}$$

et en cas de divergence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Idée de la preuve : On applique le théorème de la limite monotone à la suite (S_n) qui est *croissante*.

On étudie la série $\sum(-u_n)$ qui est à termes positifs et de même nature que la série $\sum u_n$.

N.B. : On pourrait étudier la convergence absolue de la série mais on ne pourra pas conclure dans le cas où la série ne converge pas absolument.

Que peut-on dire de la nature d'une série télescopique ?

En cas de convergence, comment peut-on calculer sa somme ?

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $p \leqslant q$. *Soit* $z \in \mathbb{C}$.

Pour quelles valeurs de z *les sommes géométriques suivantes existent-elles et que valent-elles ?*

$$\sum_{n=p}^{q} z^n \quad \text{puis} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} z^n.$$

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Donner la définition de la suite des restes de la série $\sum u_n$.

Quelles propriétés vérifie-t-elle ?

- La série télescopique $\sum(u_n - u_{n+1})$ et la suite (u_n) sont de même nature.

- On a par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}.$$

En cas de convergence, on trouve par passage à la limite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

La somme finie $\sum_{n=p}^{q} z^n$ existe pour tout complexe z mais la somme infinie $\sum_{n=p}^{+\infty} z^n$ n'a de sens qu'en cas de convergence de la série géométrique, c'est-à-dire lorsque $|z| < 1$.

$$\sum_{n=p}^{q} z^n = \begin{cases} \dfrac{z^p - z^{q+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ q-p+1 & \text{si } z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z} \text{ si } |z| < 1.$$

Définition :

La suite des restes n'existe qu'en cas de convergence de la série $\sum u_n$.
Dans ce cas, c'est la suite (R_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (R_n) converge vers 0.

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Que signifie l'assertion « *la série* $\sum u_n$ *converge* » *?*

Qu'appelle-t-on somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *et comment est-elle notée ?*

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Que signifient les notations suivantes ?

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n \ , \ \sum u_n \ , \ \sum_{n=0}^{N} u_n \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ , \ \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_n \quad (\text{où } N \in \mathbb{N})$$

À quelle condition existent-elles ?

Donner la définition de la divergence grossière *d'une série.*

La convergence du terme général vers 0 est-elle une condition nécessaire de convergence de la série ? une condition suffisante ?

On dit que *la série* $\sum u_n$ *converge* lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Dans ce cas, on appelle *somme de la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la limite de la suite (S_n) et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum u_n$ désignent toutes les deux la série de terme général u_n.

$\sum_{n=0}^{N} u_n$ est la somme partielle d'indice N.

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

$\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_n$ est le reste d'ordre N.

Les notations $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_n$ n'existent (en tant que complexes) qu'en cas de convergence de la série $\sum u_n$.

- On dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement* lorsque son terme général u_n ne tend pas vers 0.

- La convergence du terme général vers 0 *est une condition nécessaire* de convergence de la série.
  En effet, si $\sum u_n$ est une série convergente alors son terme général tend vers 0 puisque :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0.$$

- La convergence du terme général vers 0 *n'est pas une condition suffisante* de convergence de la série.
  Donnons un contre-exemple : le terme général de la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ converge vers 0 mais cette série diverge.

Donner trois familles de séries usuelles, préciser leur nature et leur somme (quand c'est pertinent).

L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Une série qui ne converge pas absolument diverge.

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

On a $u_n \sim v_n$ *et on connaît la nature de* $\sum v_n$.

Comment peut-on conclure ?

- *Séries de Riemann* $(\alpha \in \mathbb{R})$
  Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
  Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
  Cas particulier $\alpha = 1$: La série *harmonique* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- *Séries géométriques* $(z \in \mathbb{C})$
  Si $|z| < 1$ alors $\sum z^n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
  Si $|z| \geqslant 1$ alors $\sum z^n$ diverge.
- *Série exponentielle* $(z \in \mathbb{C})$
  Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Cette assertion est fausse. Prouvons-le par un contre-exemple.
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument (car la série harmonique diverge) mais elle converge par le théorème spécial des séries alternées.

- *Si (v_n) (ou (u_n)) est de signe constant à partir d'un certain rang :*
  Par comparaison par équivalent, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$.
  Dans le cas où la suite est de signe négatif, on passe par l'étude de $\sum(-u_n)$.
- *Si (v_n) n'est pas de signe constant mais $\sum v_n$ converge absolument :*
  On a $|u_n| \sim |v_n|$ avec $(|v_n|)$ positive donc par comparaison par équivalent, $\sum u_n$ converge absolument.
- Dans les autres cas, on peut penser à améliorer l'équivalent en proposant un *développement asymptotique* de u_n.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$*. Comment peut-on conclure quant à la nature de la série* $\sum u_n$ *?*

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} u_n = +\infty$*. Comment peut-on conclure quant à la nature de la série* $\sum u_n$ *?*

Que connaissez-vous comme équivalent de $n!$ *?*

Que dit la règle de d'Alembert ?

Quand peut-on penser à utiliser cette règle ?

On utilise une comparaison par petit o.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donne $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

$\boxed{3}$ $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge $(2 > 1)$ On conclut que $\sum u_n$ converge.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} u_n = +\infty$ donne $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(u_n)$

$\boxed{2}$ À partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$ (puisqu'à partir d'un certain rang, $\sqrt{n} u_n \geqslant 1$)

$\boxed{3}$ $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge $(\frac{1}{2} \leqslant 1)$ On conclut que $\sum u_n$ diverge.

Par la formule de Stirling, on a $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

- *Hypothèses :*

$\boxed{1}$ à partir d'un certain rang, $u_n > 0$,

$\boxed{2}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ (limite finie ou infinie).

- *Conclusion :*
  - Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
  - Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

On notera qu'on ne peut pas conclure dans le cas où $\ell = 1$.

Cette règle s'applique bien quand le terme général contient des puissances ou des factorielles.

Que peut-on dire de la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$?

Que peut-on dire de sa somme en cas de convergence ?

Quelle est la définition du produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Comment peut-on calculer le produit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$?

Quelles sont les hypothèses à mentionner pour pouvoir écrire chacune des assertions suivantes ?

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} Re(u_n) = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} Im(u_n) = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sachant que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$
4. $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors par linéarité, $\sum (u_n + v_n)$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors on ne peut pas conclure sur la nature de la série $\sum (u_n + v_n)$.

- Même si $\sum (u_n + v_n)$ converge, on ne peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ qu'à condition d'avoir de plus la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Le *produit de Cauchy* des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent *absolument* alors leur produit de Cauchy converge absolument et on a : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Il faut s'assurer que *toutes les séries en jeu convergent.*

On indique pour cela :

1. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent (alors par linéarité, $\sum (u_n + v_n)$ converge)
2. $\sum u_n$ converge (alors $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ converge et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ converge)
3. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent
4. $\sum |u_n|$ converge (alors $\sum u_n$ converge puisqu'elle converge absolument)

Quelles sont les trois hypothèses et les trois conclusions du critère de Leibniz ou théorème spécial des séries alternées ?

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Quelles sont les hypothèses du critère de comparaison par inégalité permettant de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$?

Même question pour conclure à la divergence de la série $\sum u_n$.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Quelles sont les hypothèses du critère de comparaison par négligeabiblité (petit o) permettant de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$?

Même question pour conclure à la divergence de la série $\sum u_n$.

- *Hypthèses :*

  $\boxed{1}$ La série $\sum u_n$ est alternée,

  $\boxed{2}$ la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

  $\boxed{3}$ la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- *Conclusions :*

  $\boxed{1}$ La série $\sum u_n$ converge,

  $\boxed{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ est du même signe que u_n,

  $\boxed{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_n|$.

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} \text{ À partir d'un certain rang, } u_n \leqslant v_n \\ \boxed{2} \text{ À partir d'un certain rang, } u_n \geqslant 0 \\ \boxed{3} \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right. \implies \sum u_n \text{ converge}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} \text{ À partir d'un certain rang, } v_n \leqslant u_n \\ \boxed{2} \text{ À partir d'un certain rang, } v_n \geqslant 0 \\ \boxed{3} \sum v_n \text{ diverge} \end{array}\right. \implies \sum u_n \text{ diverge}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} \text{ À partir d'un certain rang, } u_n = o(v_n) \\ \boxed{2} \text{ À partir d'un certain rang, } v_n \geqslant 0 \\ \boxed{3} \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right. \implies \sum u_n \text{ converge}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} \text{ À partir d'un certain rang, } v_n = o(u_n) \\ \boxed{2} \text{ À partir d'un certain rang, } u_n \geqslant 0 \\ \boxed{3} \sum v_n \text{ diverge} \end{array}\right. \implies \sum u_n \text{ diverge}$$

À quoi peut servir la méthode de comparaison série / intégrale ?

Séries numériques

Elle permet d'encadrer une somme par des intégrales, ce qui peut servir à :

- ⋆ Estimer la valeur d'une somme.
- ⋆ Déterminer la nature d'une série à termes positifs.
- ⋆ Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
- ⋆ Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ lorsque la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.