Devoir Maison facultatif.
Pour le 18 septembre.

Exemple d'idéal d'un anneau de suites

On note A l'ensemble des suites réelles bornées et I l'ensemble des suites rélles convergeant vers 0.

Q1. Montrer que A est un anneau commutatif et I est un idéal de A.

Q2. a) L'idéal I est-il engendré par un élément, c'est à dire existe-t-il $u \in A$ tel que $I = uA$?

b) L'idéal I est-il premier, c'est à dire, est ce que :

$$\forall u, v \in I, uv \in I \Rightarrow u \in I \text{ ou } v \in I$$

c) L'idéal I est-il maximal ?
Un idéal J de A est dit maximal lorsqu'il n'existe pas d'idéal K de A tel que $J \subset K \subset A$ avec $J \neq K$ et $K \neq A$.

Q3. Déterminer le radical $\sqrt{I}$ de I défini par :

$$\sqrt{I} = \{u \in A \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p \in I\}.$$

Polynômes de Hurwitz

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est appelé *polynôme de Hurwitz* quand ses racines dans $\mathbb{C}$ sont toutes dans $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$ i.e. de partie réelle strictement négative.

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit *à coefficients strictement positifs* s'il est non nul et si, d désignant son degré, P s'écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$.

1) Démontrer qu'une racine réelle α d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs, vérifie $\alpha < 0$.

2) Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

3) Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ **irréductible** et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in [\![1;n]\!]^2} (X - z_k - z_l).$$

4) On suppose ici $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ? *On pourra distinguer le cas où le polynôme P est à racines réelles et celui où ses deux racines sont complexes non réelles.*

5) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

6) Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si, et seulement si, les coefficients de P et Q sont strictement positifs.