DEVOIR MAISON 1 - *Sur les polynômes*

Corrigé

I. Polynômes réciproques (Mines PC 2025)

1. On a :

$$X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = X^p \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\frac{1}{X}\right)^k = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{p-k} = \sum_{\ell=0}^{p} a_{p-\ell} X^\ell$$

en effectuant le changement d'indice $\ell = p - k$.
On obtient alors l'équivalence :

$$P \text{ est réciproque si et seulement si } \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} a_{p-k} X^k.$$

Par unicité des cœfficients dans la base canonique de $\mathbb{C}_p[X]$, on en déduit :

$$\boxed{P \text{ est réciproque si et seulement si pour tout } k \in [\![0,p]\!],\ a_k = a_{p-k}.}$$

2. Notons que comme P est de degré p, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} m_i = p$.
On a donc :

$$\boxed{X^p P\left(\frac{1}{X}\right)} = a_p X^p \prod_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^{d} X^{m_i} \prod_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} \boxed{= a_p \prod_{i=1}^{d}(1 - \lambda_i X)^{m_i}}.$$

On suppose désormais que P est réciproque.
Montrons que 0 n'est pas une racine de P.
On a $P(0) = a_0$ et $a_0 = a_p$ d'après la question 1, avec $a_p \neq 0$, d'où $P(0) \neq 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1,d]\!],\ \lambda_i \neq 0.}$$

On peut alors écrire avec la factorisation précédente :

$$P(X) = a_p \prod_{i=1}^{d}(-\lambda_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{d}\left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i} = (-1)^p a_p \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{m_i} \prod_{i=1}^{d}\left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}.$$

Comme les complexes $\dfrac{1}{\lambda_i}$, pour $i \in [\![1,d]\!]$, sont distincts, on déduit de cette factorisation de P que :

$$\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1,d]\!],\ \frac{1}{\lambda_i} \text{ est une racine de } P \text{ avec la multiplicité } m_i.}$$

3. On suppose que Q est antiréciproque.
Comme $Q(X) = -X^p Q\left(\dfrac{1}{X}\right)$, on a $Q(1) = -1^p \times Q(1) = -Q(1)$ donc $Q(1) = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{1 \text{ est une racine de } Q.}$$

On en déduit qu'il existe un polynôme P de degré $p-1$ (avec $p-1 \in \mathbb{N}$) tel que $Q(X) = (X-1)P(X)$.
Si $p = 1$ alors P est un polynôme de degré 0 donc c'est un polynôme constant (non nul).

On suppose désormais que p est supérieur ou égal à 2.
On a :

$$-X^pQ\left(\frac{1}{X}\right) = -X^p\left(\frac{1}{X}-1\right)P\left(\frac{1}{X}\right) = X^{p-1}(X-1)P\left(\frac{1}{X}\right).$$

Comme Q est antiréciproque, on a alors :

$$(X-1)P(X) = X^{p-1}(X-1)P\left(\frac{1}{X}\right) \text{ d'où } P(X) = X^{p-1}P\left(\frac{1}{X}\right)$$

puisque $X-1$ n'est pas le polynôme nul.
On en déduit que P est un polynôme réciproque (on a bien $p-1\in\mathbb{N}^*$).
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un polynôme } P \text{ constant ou réciproque tel que } Q=(X-1)P.}$$

4. Notons tout d'abord que pour $a\in\mathbb{C}^*$:

$$a=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a\in\{-1,1\}.$$

Soit a une racine de R de multiplicité m.
Si $a=1$ alors $a^m=1$.
Si $a=-1$ alors $a^m=(-1)^m$.
Si $a\notin\{-1,1\}$ alors $\dfrac{1}{a}$ est aussi une racine de R de multiplicité m, distincte de a, 1 et -1, et on a :

$$a^m\times\left(\frac{1}{a}\right)^m=1.$$

En regroupant toute racine différente de -1 et 1 avec son inverse dans le calcul du produit, on obtient donc que le produit des racines vaut 1 si -1 n'est pas racine et $(-1)^\alpha$ si -1 est racine de multiplicité α.
Ainsi :

$$\boxed{\text{le produit des racines de } R\text{, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou } -1.}$$

5. Reprenons les notations de la question 2 pour le polynôme R de degré $p\in\mathbb{N}^*$:

$$R=a_p\prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)^{m_i},$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de R et $m_1,\ldots,m_d$ leurs multiplicités, a_p le cœfficient dominant.
Comme 0 n'est pas racine de R, on obtient comme en question 2 :

$$X^pR\left(\frac{1}{X}\right)=a_p\prod_{i=1}^{d}(1-\lambda_iX)^{m_i}=(-1)^pa_p\prod_{i=1}^{d}\lambda_i^{m_i}\prod_{i=1}^{d}\left(X-\frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}=\underbrace{(-1)^p\prod_{i=1}^{d}\lambda_i^{m_i}}_{\in\{-1,1\}}a_p\prod_{i=1}^{d}\left(X-\frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}.$$

Or, par les hypothèses données, on a aussi $R(X)=a_p\prod_{i=1}^{d}\left(X-\dfrac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}$ car on peut paramétrer l'ensemble des racines par $\left\{\dfrac{1}{\lambda_i},\ i\in[\![1,d]\!]\right\}$.
On a donc $R(X)=\pm X^pR\left(\dfrac{1}{X}\right)$ d'où :

$$\boxed{R \text{ est réciproque ou antiréciproque.}}$$

II. Étude de deux familles de polynômes (Centrale PC 2022)

A. Polynômes de Lagrange

1. On peut aussi écrire :

$$L_i = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{1}{a_i - a_j} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (X - a_j).$$

Comme L_i est le produit d'une constante non nulle et de $n-1$ polynômes unitaires de degré 1, on en déduit que :

$$\boxed{L_i \text{ est un polynôme de degré } n-1 \text{ et de cœfficient dominant } \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{1}{a_i - a_j}.}$$

2. ▸ $\langle .,. \rangle$ définit bien une application de $\big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^2$ dans $\mathbb{R}$.
▸ Soit $(P,Q,R) \in \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + Q, R\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda P + Q)(a_k) R(a_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda P(a_k) + Q(a_k)) R(a_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(\lambda P(a_k)R(a_k) + Q(a_k)R(a_k)\big) = \lambda \sum_{k=1}^{n} P(a_k)R(a_k) + \sum_{k=1}^{n} Q(a_k)R(a_k)\\ &= \lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle.\end{aligned}$$

Donc l'application $\langle .,. \rangle$ est linéaire à gauche.
▸ Elle est de plus symétrique car pour tout $(P,Q) \in \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^2$, on a :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)Q(a_k) = \sum_{k=1}^{n} Q(a_k)P(a_k) = \langle Q,P\rangle.$$

On en déduit donc également qu'elle est bilinéaire.
▸ Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a :

$$\langle P,P\rangle = \sum_{k=1}^{n} \big(P(a_k)\big)^2 \geqslant 0$$

en tant que somme de termes positifs.
Donc l'application $\langle .,. \rangle$ est positive.
▸ Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On suppose que $\langle P,P\rangle = 0$ c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \big(P(a_k)\big)^2 = 0$.
Comme il s'agit d'une somme de termes positifs, on en déduit que tous ses termes sont nuls d'où pour tout $k \in [\![, 1n]\!]$, $P(a_k) = 0$.
Ainsi, P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ admettant n racines distinctes donc c'est le polynôme nul.
On en déduit que l'application $\langle .,. \rangle$ est définie positive.
Ainsi :

$$\boxed{\langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

3. Soit $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$.
On a $L_i(a_i) = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$ et si $k \neq i$, comme le produit $\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (X - a_j)$ contient le facteur $X - a_k$, qui s'annule en a_k, on a $L_i(a_k) = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i\\ 0 & \text{si } k \neq i\end{cases}}$$

4. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On a :

$$\langle L_i, P\rangle = \sum_{k=1}^{n} L_i(a_k)P(a_k) = \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} P(a_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \underbrace{L_i(a_k)}_{=0} P(a_k) = P(a_i).$$

Ainsi :

$$\boxed{\langle L_i, P\rangle = P(a_i).}$$

5. La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est bien une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après la question 1.
De plus, d'après les questions 4 puis 3, on a pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\langle L_i, L_j\rangle = L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On en déduit que $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Elle est donc en particulier libre et elle est de cardinal $n = \dim\big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Ainsi :

$$\boxed{(L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

6. Comme $(L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \langle P, L_i\rangle L_i = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$$

d'après la question 4.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i.}$$

7. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, on a $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.
Étudions le cœfficient devant X^{n-1} du polynôme P.
Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le cœfficient devant X^{n-1} du polynôme L_i est $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$, le cœfficient devant X^{n-1} du polynôme P est $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{P(a_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$.
Dans le cas d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$, le cœfficient devant X^{n-1} est nul.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout polynôme } P \text{ de degré inférieur ou égal à } n-2, \text{ on a } \sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)} = 0.}$$

B. Polynômes de Tchebychev

8. D'après la formule du binôme, utilisée pour développer $(1+x)^n$ avec $x = 1$ puis $x = -1$, on a :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

On sépare dans ces deux sommes les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, on obtient :

$$2^n = \sum_{p \in \mathbb{N} / 0 \leqslant 2p \leqslant n} \binom{n}{2p} + \sum_{p \in \mathbb{N} / 0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} \binom{n}{2p+1} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1}$$

et

$$0 = \sum_{p\in\mathbb{N}/\,0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p}(-1)^{2p} + \sum_{p\in\mathbb{N}/\,0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1}(-1)^{2p+1} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2p+1}.$$

En additionnant les deux égalités obtenues, on obtient alors :

$$2^n + 0 = 2\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p} = 2^{n-1}.}$$

9. Pour tout $p \in [\![0, \lfloor n/2\rfloor]\!]$, le polynôme $(1-X^2)^p$ est un polynôme de degré $2p$ et de cœfficient dominant $(-1)^p$ (pour le voir, on peut développer par la formule du binôme) donc $\underbrace{(-1)^p\binom{n}{2p}}_{\neq 0} X^{n-2p}(1-X^2)^p$ est un polynôme de degré $n-2p+2p = n$ et de cœfficient dominant $(-1)^p\binom{n}{2p}(-1)^p = \binom{n}{2p}$.
Par somme, on en déduit que T_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et que son cœfficient devant X^n vaut $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p} = 2^{n-1}$. Comme $2^{n-1} \neq 0$, on en déduit que :

$$\boxed{T_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et son cœfficient dominant vaut } 2^{n-1}.}$$

10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}\big((e^{i\theta})^n\big) = \mathrm{Re}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\right)$$

par la formule du binôme de Newton.
En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on a alors :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}i^{2p}(\sin\theta)^{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2p+1}(\cos\theta)^{n-2p-1}i^{2p+1}(\sin\theta)^{2p+1}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(-1)^p(\sin\theta)^{2p}}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2p+1}(\cos\theta)^{n-2p-1}(-1)^p(\sin\theta)^{2p+1}}_{\in\mathbb{R}}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p(\cos\theta)^{n-2p}\big((\sin\theta)^2\big)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}\big(1-(\cos\theta)^2\big)^p = T_n(\cos(\theta)).$$

Prouvons maintenant l'unicité.
On suppose que P_n est un polynôme à cœfficients réels vérifiant la relation :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

On a alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(T_n - P_n)(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$.
Ainsi, le polynôme $T_n - P_n$ a une infinité de racines (en effet, $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ donc tous les réels de $[-1,1]$ sont racines) donc c'est le polynôme nul d'où $P_n = T_n$.
Ainsi :

$$\boxed{T_n \text{ est l'unique polynôme à cœfficients réels vérifiant pour tout } \theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

11. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a d'après la question 10 :

$$T_n(y_{k,n}) = T_n\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = 0$$

car $\dfrac{(2k-1)\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
De plus, les réels $\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont des réels distincts de $[0, \pi]$ et la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$ donc les réels $y_{k,n}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont tous distincts et ils sont au nombre de n.
On a ainsi trouvé n racines distinctes de T_n qui est de degré n et de cœfficient dominant 2^{n-1} donc le polynôme T_n se factorise sous la forme :

$$\boxed{T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - y_{k,n}).}$$

12. Comme la fonction cosinus est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$, on a :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T_n(\cos(\theta))| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\cos(n\theta)| = 1.$$

En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|\cos(n\theta)| \leqslant 1$ et $1 = |\cos(n \times 0)|$ donc 1 est le maximum de l'ensemble $\{|\cos(n\theta)|, \theta \in \mathbb{R}\}$ donc c'est en particulier sa borne supérieure.
Par conséquent, on a $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$ car $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ est un réel positif ne dépendant pas de x.
Ainsi :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1 \text{ et le polynôme } \frac{1}{2^{n-1}}T_n = \prod_{k=1}^{n}(X - y_{k,n}) \text{ est un polynôme unitaire de degré } n \text{ réalisant le cas d'égalité dans (2).}}$$

13. Comme Q est la différence de deux polynômes unitaires de degré n, les termes X^n se compensent donc :

$$\boxed{Q \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } n-1.}$$

14. On suppose que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a $Q(z_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(z_k) - W(z_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(k\pi) - W(z_k) = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}} - W(z_k)$ (d'après la question 10) et de même $Q(z_{k+1}) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^{n-1}} - W(z_{k+1})$.

On a alors $Q(z_k)Q(z_{k+1}) = \begin{cases} -\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - W(z_k)\right)\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + W(z_{k+1})\right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + W(z_k)\right)\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - W(z_{k+1})\right) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

Or, comme $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$, $|W(x)| \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |W(t)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ donc $-\dfrac{1}{2^{n-1}} < W(x) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ donc $\dfrac{1}{2^{n-1}} - W(x) > 0$ et $\dfrac{1}{2^{n-1}} + W(x) > 0$.
Comme z_k et z_{k+1} appartiennent à $[-1, 1]$, on en déduit dans les deux cas que $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0.}$$

On a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_{k+1} < z_k$ (car la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$) et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue Q, comme $Q(z_k)$ et $Q(z_{k+1})$ sont de signes contraires, on obtient que Q s'annule sur $]z_{k+1}, z_k[$.

On obtient ainsi n racines distinctes de Q et le polynôme Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$ (d'après la question 13) donc nécessairement, Q est le polynôme nul.
Ainsi, $W = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$, ce qui est absurde car $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$.
On en déduit (I.2) :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

15. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a :

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)} = \frac{(-1)^k}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)}.$$

Or, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on a $z_k - z_j < 0$ si $j \leqslant k-1$ et $z_k - z_j > 0$ si $j \geqslant k+1$ (par stricte décroissante de la suite $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$).
Il y a donc k termes strictement négatifs dans le produit et les autres sont strictement positifs donc le produit $\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)$ est du signe de $(-1)^k$.
On en déduit que le quotient est positif :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)} \geqslant 0.}$$

16. Par la question 7 en adaptant les notations, $(z_0,\dots,z_n)$ sont $n+1$ réels deux à deux distincts, et Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}}(z_k - z_j)} = 0.$$

Or, d'après la question précédente, c'est une somme de termes positifs donc tous ses termes sont nuls.
On en déduit que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q(z_k) = 0$.
Ainsi, Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui admet $n+1$ racines distinctes donc c'est le polynôme nul $Q = 0$ et par suite :

$$\boxed{W = \frac{1}{2^{n-1}}T_n.}$$