
DEVOIR MAISON 2 - SÉRIES NUMÉRIQUES
À rendre le lundi 29 septembre

Exercice 1 SÉRIE EXPONENTIELLE

Le but de cet exercice est de prouver par une autre méthode que celle vue en cours les résultats sur la série exponentielle (convergence et valeur de sa somme). Pour sa résolution, il est donc interdit d'utiliser la Proposition 7 du cours sur les séries exponentielles.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge.

On note dans la suite :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

2. Montrer qu'on a :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z + z') = f(z)f(z').$$

3. (a) Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad 1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x} \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 0[, \quad 1 + \frac{x}{2} \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq 1$$

(pour x négatif, on pourra penser à utiliser le théorème spécial des séries alternées)

- (b) En déduire que f est dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = 1$.

4. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h}.$$

- (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f' = f$.

- (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(ix).$$

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{g(x) - g(0)}{x} - i = i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!}$.

- (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} - i \right| \leq e^{|x|} - 1.$$

- (c) En déduire que g est dérivable en 0 et vérifie $g'(0) = i$.

6. (a) En utilisant une méthode similaire à celle utilisée dans la question 4, en déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g' = ig$.

- (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(ix) = e^{ix}$.

7. Déduire de ce qui précède que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

Exercice 2 ÉTUDE DES SÉRIES CONGRUO-HARMONIQUES ALTERNÉES (*Extrait sujet Mines*)

L'objectif de cet exercice est d'étudier une famille de séries particulières.

NOTATIONS

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x .
- Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on dit que p divise q et on note $p \mid q$, s'il existe un entier k tel que $q = kp$.

Définition 1 : Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle *série congruo-harmonique de paramètres p et q* , la série de terme général u_k défini pour tout $k \geq 0$ par

$$u_k := u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk + q}$$

et l'on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série. Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\phi_{p,q} : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk + q} \end{cases}.$$

A. PRÉLIMINAIRES

1. Justifier que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.
2. Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

3. En déduire la valeur de $S_{1,1}$.
4. Montrer alors que, pour tout $q \geq 2$,

$$S_{1,q} = (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2).$$

5. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{p,p} = \frac{\ln 2}{p}.$$

6. Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < q$ et $p \mid q$, montrer qu'il existe une constante $\lambda := \lambda(p, q)$ que l'on déterminera, telle que

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

B. EXPRESSION DE $S_{p,q}$ SOUS LA FORME D'UNE INTÉGRALE

Dans cette partie, on fixe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} := \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$I_{p,q}(t) := \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx.$$

7. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

8. Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k$ puis en déduire que

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right).$$

9. Montrer alors que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt.$$

10. Calculer la valeur de $S_{2,1}$.

C. CALCUL DE $S_{3,1}$

11. Déterminer trois nombres complexes a , b et ω tels que

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-\omega} + \frac{\bar{b}}{X-\bar{\omega}}.$$

12. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ c'est-à-dire déterminer cinq réels α , β , γ , λ et μ tels que :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + \lambda X + \mu}.$$

13. En déduire la valeur de $S_{3,1}$.