
DEVOIR SURVEILLÉ 1 - 19/09/25 - Durée 4h

EXERCICE

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature des trois séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{n}{(\ln n)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right) - 1 \right)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(-\frac{1}{k}\right) - 1 \right)$.

3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! e^{n-k}} \right)$ converge et déterminer sa somme.

PROBLÈME 1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

- (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On se place désormais sous cette condition.

- (b) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer qu'on a :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

(c) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$.

(a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

(c) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

(d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

(e) Montrer que pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

(f) La série $\sum R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_{1,n}| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2.

4. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et que la série $\sum R_{1,n}$ est alternée.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|R_{1,n}| - |R_{1,n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right).$$

(c) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} \geq 0.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right)_{p \geq 0}$ est décroissante.

(d) En déduire la monotonie de la suite $(|R_{1,n}|)_{n \geq 1}$ puis que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2.

PROBLÈME 2

Le but de ce problème est de donner, dans la partie A., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie B., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

PARTIE A.

1. (a) On donne ici la *formule de Taylor avec reste intégral* :

Soit $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$.
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ sur I , alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^r}{r!} f^{(r+1)}(t) dt.$$

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} - \int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt.$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt \leq 2 \int_{-1/2}^0 (1+2t)^n dt.$

(d) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k2^k}$ converge et qu'on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2.$

2. (a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right)$ converge et déterminer sa somme.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)2^k} = \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right) - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ converge et donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n.$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

(b) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau_{2n} = H_{2n} - H_n.$

(d) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$

4. On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

(b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$: $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

(c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

Pour la suite, on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2)$.

PARTIE B.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

R_n , S_n , T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première partie.

1. (a) À l'aide de la question A.2.(b), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{1}{(n+1)2^n} - R_n.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geq n+1$, $\frac{1}{k(k+1)2^k} \leq \frac{1}{(n+2)k2^k}$.

En déduire que $V_n = o(R_n)$.

(c) Conclure que $R_n \sim \frac{1}{n2^n}$.

2. (a) En utilisant la question A.1.(a), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$.

(b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq N, (1-\varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}} \leq a_k \leq (1+\varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{3/2}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } N \leq n \leq p-1, (1-\varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \sum_{k=n+1}^p a_k \leq (1+\varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

(d) Montrer alors que $T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}n}$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_{k-1} - R_k}{k+1}.$$

- (b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{R_n}{n+2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right).$$

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$$

puis que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

En déduire que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} = o(V_n)$.

- (d) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifier vos réponses.