Pack de demarrage - formalisme - fonctions
DS1 - durée : 2h

Exercice 1 :

En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $x^2 + 6x - 7 = 0$, puis $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$
2. $\sqrt{3x+7} = x + 1$.

1. On remarque déjà que l'équation est une équation polynômiale, définie sur $\mathbb{R}$, et qu'on va résoudre sur $\mathbb{R}$ également.
   En observant que 1 est solution évidente, on en déduit que -7 est également solution d'où
   $$\boxed{x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -7}$$
   Pour la seconde équation, posons $X = e^x$.
   L'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ devient alors $X^2 + 6X - 7 = 0$ mais cette fois $X > 0$.
   Ainsi $X = 1$ est l'unique solution, c'est à dire
   $$\boxed{e^{2x} + 6e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0}$$
2. On commence par régler le problème de définition : $\sqrt{3x+7}$ est défini si et seulement si $3x+7 \geq 0$, c'est à dire $x \geq -\frac{7}{3}$.
   En outre, si x est solution, alors comme $\sqrt{3x+7} \geq 0$, on a également $x + 1 \geq 0$, donc $x \geq -1$.
   L'ensemble de résolution de cette équation est donc $[-1, +\infty[$.
   Sur cet intervalle, $\sqrt{3x+7}$ et $x + 1$ sont positifs, ainsi :
   $$\begin{aligned} \sqrt{3x+7} = x+1 &\Leftrightarrow 3x + 7 = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x + 1 - 3x - 7 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - x - 6 \end{aligned}$$
   Or $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$ (-2 est racine évidente, ou on calcule le discriminant qui vaut 25)
   Comme -2 n'est pas dans l'ensemble de résolution, on en déduit que
   $$\boxed{\sqrt{3x+7} = x + 1 \Leftrightarrow x = 3}$$

Exercice 2 :

Résoudre les systèmes ci dessous :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rl} x - 3y + 2z & = 1 \\ 2x - 5y + 3z & = 5 \\ 3x - 7y + 5z & = 8 \end{array} \right.$$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 5y - 6z & = 3 \\ x + 2y - 2z & = 1 \\ -3x - 8y + 10z & = -5 \end{array} \right.$$

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rl} x - 3y + 2z & = 1 \\ 2x - 5y + 3z & = 5 \\ 3x - 7y + 5z & = 8 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} x - 3y + 2z & = 1 \\ y - z & = 3 \\ 2y - z & = 5 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} x - 3y + 2z & = 1 \\ y - z & = 3 \\ z & = -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x & = 9 \\ y & = 2 \\ z & = -1 \end{array} \right.$$

L'unique solution de S_1 est donc $\boxed{x = 9, y = 2, z = -1}$.

$$S_2 : \begin{cases} 2x+5y-6z &= 3 \\ x+2y-2z &= 1 \\ -3x-8y+10z &= -5 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x+5y-6z &= 3 \\ y-2z &= 1 \\ -y+2z &= -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+5y-6z &= 3 \\ y-2z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{cases} \text{(système de rang 2, compatible)}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -1-2z \\ y &= 1+2z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \{(-1-2z, 1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 3 : des ensembles de définition

Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$. Déterminez sa parité éventuelle (paire, impaire ou ni l'un ni l'autre)
2. Soit $P : x \mapsto x^3 + x^2 + 2x + 2$
   a) Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
   b) En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$P(x) = (x-\alpha)(ax^2 + bx + c)$$
   c) En déduire l'ensemble de définition de la fonction
   $$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x-2}}$$

1. Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ existe si et seulement si $\dfrac{3+x}{3-x} > 0$ et $3 - x \neq 0$.
   Le plus simple est de faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
quotient		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur }]-3;3[}$.
   De plus, pour tout $x \in]-3;3[$,
   $$f(-x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = -f(-x)$$
   donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$
2. a) On a $P(-1) = 0$, d'où $\boxed{\alpha = -1}$
   b) On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
   $$P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$
   Plusieurs techniques : on peut développer et identifier, ou repérer directement que $a = 1$ et $c = 2$, avant d'en déduire que $b = 0$
   ainsi
   $$\boxed{P(x) = (x+1)(x^2+2)}$$

c) Comme $x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est du signe de $(x+1)$.
D'autre part, le quotient est défini pour $x \neq 2$.
Enfin, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est défini sur $\mathbb{R}_+$ seulement, on va utiliser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
(x^2+2)		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Finalement, f est définie sur $\boxed{]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[}$.

Exercice 4 : Des récurrences

1. Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} & = u_n + (2n+1) \end{cases}$$

   a) Vérifiez que $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$, puis calculez u_3 et u_4.
   b) Conjecturer une formule donnant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et démontrez cette formule par récurrence.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 & = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} & = u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

   Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3^n$.

1. a) On a bien $u_1 = 0 + (2 \times 0 + 1) = 1$.
   Ensuite $u_2 = u_1 + (2 \times 1 + 1) = 4$, comme annoncé, puis $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$ et $u_4 = 16$.

   b) Il semblerait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$.
   Soit donc P_n la proposition : $u_n = n^2$ et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 = 0^2$, donc P_0 est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie, c'est à dire $u_n = n^2$.
   On a alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \underset{HR}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
   Ainsi P_{n+1} est vraie et l'hérédité est vérifiée.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

2. Soit P_n la proposition $u_n \leq 3^n$ et montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

   Init : On a bien $u_0 = 1 \leq 3^0$, et $u_1 = 1 \leq 3^1$: P_0 et P_1 sont vérifiée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est à dire que $u_n \leq 3^n$ et $u_{n+1} \leq 3^{n+1}$
   Alors $3u_n \leq 3^{n+1}$ (3 est positif) et par somme d'inégalités

$$u_{n+1} + 3u_n \leq 3^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \times 3^{n+1}$$

   Ainsi $u_{n+2} \leq 2.3^{n+1}$ et comme $2 < 3$, on en déduit

$$u_{n+2} \leq 3.3^{n+1} = 3^{n+2}$$

   ce qui achève l'hérédité.

   Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3^n$.

Exercice 5 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + my & = 1 \\ mx + y & = 1 \end{array} \right.$$

Déterminez le nombre de solutions de ce système en fonction des valeurs de m.

Exercice difficile sur lequel on n'a pas encore fait beaucoup (à peine en corrigé de TD en autonomie). L'idée est de faire très attention à chaque opération, car il ne faut en faire aucune d'interdite.

La première opération qu'on veut faire est $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$. Celle-ci est possible, quel que soit m : c'est L_1 qui est multipliée par m, donc même si $m = 0$, ce n'est pas un problème.

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + my & = 1 \\ mx + y & = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + my & = 1 \\ (1 - m^2)y & = 1 - m \end{array} \right.$$

Il y a alors trois cas :

si $m^2 - 1 \neq 0$: c'est à dire si $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

Le système est de rang 2, avec deux inconnues. Il y a un $\boxed{\text{unique couple solution}}$ (il suffit de diviser par $1-m^2$ la deuxième ligne, et réinjecter dans la première pour avoir x et y... ce n'est pas demandé : on veut juste le nombre de solution !)

si $m = 1$ Le système devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + y & = 1 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Rang 1, deux inconnues et compatible : il y a une inconnue paramètre, et donc $\boxed{\text{une infinité de solutions.}}$

si $m = -1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x - y & = 1 \\ 0 & = 2 \end{array} \right.$$

Cette fois, c'est incompatible, et le système n'a $\boxed{\text{pas de solution.}}$

Exercice 6 : A faire en dernier et seulement si tout le reste est fait.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturer une formule pour u_{2n} et pour u_{2n+1} et démontrez la.

1. On a $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

   Puis $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1 - 1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

   On a alors $u_3 = -1$ et $u_4 = \dfrac{1}{2}$.

2. Il semblerait que $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et que $u_{2n+1} = -1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons donc $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.
C'est une récurrence simple, même si ça ressemble à une récurrence double (en fait, c'est une récurrence où la proposition $P(n)$ contient deux propositions)

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_{2\times 0} = u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{2\times 0+1} = u_1 = -1$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Alors $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+1} - 1}$. Or $u_{2n+1} = -1$ car on a supposé $\mathcal{P}(n)$.
Donc $u_{2(n+1)} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.
De plus, $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+2} - 1}$. On vient de montrer que $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{1}{2}$
On a donc $u_{2(n+1)+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$
On a bien prouvé $\mathcal{P}(n+1)$
Conclusion : par le principe de récurrence, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.