

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

EXERCICE

1. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = +\infty$ par croissances comparées.

On en déduit que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 2} \frac{n}{(\ln n)^2} \text{ diverge grossièrement.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$:

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\ln 2}{\sqrt{n}} \geq 0.$$

De plus, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (car $\frac{1}{2} \leq 1$) donc la série $\sum_{n \geq 1} (\ln 2) \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge également (constante multiplicative non nulle).

Par comparaison par inégalité, on en déduit que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} \frac{(\ln n)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{1/2}} = 0$ par croissances comparées donc $\frac{(\ln n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($3/2 > 1$).

Par comparaison par petit o, on en déduit que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^2} \text{ converge.}$$

2. On a $e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ donc $\exp\left(-\frac{1}{n}\right) - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n}$ donc $1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} -\left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ diverge donc (constante multiplicative $-1 \neq 0$ ne change pas la nature) :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right) - 1\right) \text{ diverge.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leq 0$ donc $\exp\left(-\frac{1}{n}\right) \leq 1$ (croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$).

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge et est à termes positifs donc sa suite de sommes partielles tend vers $+\infty$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{k}\right)\right) = +\infty$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(-\frac{1}{k}\right) - 1\right) = -\infty.$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ et $v_n = \frac{1}{e^n}$.

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! e^{n-k}} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$ est le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

La série $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n!}$ converge (série exponentielle de paramètre 1) donc la série $\sum u_n$ converge absolument.

La série $\sum |v_n| = \sum (e^{-1})^n$ converge (série géométrique avec $|e^{-1}| < 1$) donc la série $\sum v_n$ converge absolument.

Par produit de Cauchy, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! e^{n-k}} \right)$ converge (absolument) et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! e^{n-k}} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-1})^n \right) = e^{-1} \times \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}.$$

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! e^{n-k}} \right)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! e^{n-k}} \right) = \frac{1}{e - 1}$.

PROBLÈME 1 d'après Ecricome 2020 et E3A MP 2006

1.(a) Par le cours :

la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1.(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ (puisque $\alpha > 1$) donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N - 1$.

En sommant pour k allant de n à $N - 1$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Or, par changement d'indice $\ell = k + 1$, on trouve :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha}$$

et par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_n^N = \frac{1}{1-\alpha} (N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}) \text{ car } \alpha \neq 1.$$

Par passage à la limite dans les inégalités obtenus, comme les séries en jeu convergent et $\lim_{N \rightarrow +\infty} N^{1-\alpha} = 0$ puisque $\alpha > 1$, on obtient :

$$R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} + \frac{1}{n^\alpha}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Comme $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, on a $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
On en déduit par encadrement que :

$$R_{1,n} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

1.(c) On est toujours dans le cas $\alpha > 1$.

Par définition, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 lorsque la série $\sum_{n \geq 0} R_{1,n}$ converge.

Or, on a $R_{1,n} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \geq 0$.

Par comparaison, on en déduit que les séries $\sum R_{1,n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ sont de même nature (puisque $\frac{1}{\alpha-1}$ est une constante multiplicative non nulle).

Par conséquent, la série $\sum R_{1,n}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Ainsi :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2.$$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \exp(n \ln n - n \ln(n+1)) = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1 + o(1))$$

car $\ln(1+x) = x + o(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 + o(1)) = -1$, on en déduit par continuité de la fonction exponentielle en -1 que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}.$$

2.(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \times e^{-1} = 0 < 1.$$

On en déduit par le théorème de d'Alembert que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}$$

2.(c) Soit $k \geq 3$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $k > 0$), on a $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{3^k}$.

Ainsi :

$$\text{pour tout } k \geq 3, u_k \leq \frac{1}{3^k}.$$

Soit $n \geq 2$. On a pour tout $k \geq n+1$, $k \geq 3$ donc $0 \leq u_k = \frac{1}{k^k} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Comme les séries $\sum_{k \geq n+1} u_k$ et $\sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ convergent (série géométrique avec $|\frac{1}{3}| < 1$), on en déduit par somme que :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1/3^{n+1}}{1-1/3} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

$$\text{Pour tout } n \geq 2, 0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

2.(d) On a donc :

- Pour tout $n \geq 2$, $R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{1,n} \geq 0$.
- La série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$ aussi.

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum R_{1,n}$ converge.

Ainsi :

la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2.
--

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geq n+1$, $k \geq 2$ donc $0 \leq R_{1,k} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{3^k}$.

Comme les séries en jeu convergent, on obtient par croissance et linéarité de la somme :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

Ainsi :

Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$.
--

2.(e) Montrons par récurrence que pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout

$n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$.

Initialisation : Le cas $p = 2$ a été prouvé à la question 2.(d).

Hérédité : Soit $p \geq 2$.

On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$.

La série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^p} \frac{1}{3^n}$ aussi.

Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum R_{p,n}$ converge.

Cela signifie que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geq n+1$, $k \geq 1$ donc $0 \leq R_{p,k} \leq \frac{1}{2^p} \frac{1}{3^k}$.

Comme les séries en jeu convergent, on obtient par croissance et linéarité de la somme :

$$0 \leq R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2^p} \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2^{p+1} \cdot 3^n}.$$

La propriété est donc vraie au rang $p+1$.

Par récurrence, on a donc prouvé que :

pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$.
--

2.(f) On a montré que pour tout $p \geq 2$ et tout $n \geq 1$, on a $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$.

On a donc en particulier, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n \cdot 3^n} = \frac{1}{6^n}$ (on prend $p = n$).

Comme la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{6}\right)^n$ converge ($|\frac{1}{6}| < 1$), on en déduit par comparaison par inégalité que :

la série $\sum R_{n,n}$ converge.

3.(a) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \times \frac{1}{n^2}$ avec $\frac{1}{n^2} \geq 0$.

De plus, la suite $(|u_n|)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge et pour tout } n \in \mathbb{N}, |R_{1,n}| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

3.(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |R_{1,n}| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$) donc par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum R_{1,n}$ converge absolument donc converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$$

4.(a) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} \geq 0$.

De plus, la suite $(|u_n|)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge}}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire de $(-1)^{n+1}$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum R_{1,n} \text{ est aussi alternée.}}$$

4.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

La série $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{n+1+p}$ converge par le critère de Leibniz puisque la suite $\left(\frac{1}{n+1+p}\right)_{p \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.

De même, la série $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{n+2+p}$ converge.

Par linéarité, on en déduit que la série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right)$ converge et on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{n+1+p} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{n+2+p}.$$

Par les changements d'indices $k = n+1+p$ et $k = n+2+p$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-2}}{k} = (-1)^{-n-1} R_{1,n} - (-1)^{-n-2} R_{1,n+1}.$$

Or, on a vu que $R_{1,n}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ donc $R_{1,n} = (-1)^{n+1} |R_{1,n}|$ et de même, $R_{1,n+1}$ est du signe de $(-1)^{n+2}$ donc $R_{1,n+1} = (-1)^{n+2} |R_{1,n+1}|$.

En remplaçant dans l'égalité précédente, on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right) = |R_{1,n}| - |R_{1,n+1}|.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |R_{1,n}| - |R_{1,n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right).$$

4.(c) On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} &= \frac{m(m+1) - 2m(m+2) + (m+2)(m+1)}{(m+2)(m+1)m} \\ &= \frac{m^2 + m - 2m^2 - 4m + m^2 + 3m + 2}{(m+2)(m+1)m} \\ &= \frac{2}{(m+2)(m+1)m}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} \geq 0.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

En appliquant ce qui précède avec $m = n + p + 1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{1}{n+p+3} - \frac{2}{n+p+2} + \frac{1}{n+p+1} \geq 0 \text{ donc } \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2} \geq \frac{1}{n+p+2} - \frac{1}{n+p+3}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right)_{p \geq 0} \text{ est décroissante.}}$$

4.(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

La série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right)$ est une série alternée car pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \geq 0$.

De plus, la suite $\left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right)_{p \geq 0}$ est décroissante et a pour limite 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right)$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire positive.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_{1,n}| - |R_{1,n+1}| \geq 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (|R_{1,n}|)_{n \geq 0} \text{ est décroissante.}}$

On sait de plus qu'en tant que suite des restes d'une série convergente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{1,n} = 0$.

Ainsi, $\sum R_{1,n}$ est une série alternée, la suite $(|R_{1,n}|)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.

Par le critère de Leibniz, on en déduit que la série $\sum R_{1,n}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$$

PROBLÈME 2 d'après E3A PC 2016

A.1.(a) Notons f la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Initialisation :

On a pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et pour $k = 1$, $\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} = \frac{(-1)^{20!}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

En dérivant, on obtient pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(1+x)^{-k-1} = \frac{(-1)^{k+2}k!}{(1+x)^{k+1}}$.

Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $] -1, +\infty[$.

Soit $x \in] -1, +\infty[$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée entre 0 et x , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme $f(0) = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$, on en déduit :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+t)^{n+1}} dt$$

d'où :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

A.1.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la question précédente avec $x = -\frac{1}{2} \in] -1, +\infty[$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + (-1)^n \int_0^{-1/2} \frac{(-1/2-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

ou encore :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k+1}}{k2^k} + (-1)^n \int_0^{-1/2} (-1)^n \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt.$$

Ainsi :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} - \int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt.$$

A.1.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a pour tout $t \in [-1/2, 0]$, $1+2t \geq 0$ et $1+t \geq \frac{1}{2} > 0$ donc $\frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale ($-1/2 \leq 0$), on en déduit que $\int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt \geq 0$.

On a pour tout $t \in [-1/2, 0]$, $1+t \geq \frac{1}{2} \geq 0$ donc $(1+t)^{n+1} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $2^n(1+t)^{n+1} \geq \frac{1}{2} > 0$ et comme $(1+2t)^n \geq 0$, on en déduit que $\frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \leq 2(1+2t)^n$.

Par croissance de l'intégrale ($-1/2 \leq 0$), on en déduit que $\int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt \leq 2 \int_{-1/2}^0 (1+2t)^n dt$.

Ainsi :

$$0 \leq \int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt \leq 2 \int_{-1/2}^0 (1+2t)^n dt.$$

A.1.(d) On a :

$$2 \int_{-1/2}^0 (1+2t)^n dt = \left[\frac{1}{(n+1)} (1+2t)^{n+1} \right]_{-1/2}^0 = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1/2}^0 \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} dt = 0.$$

Par A.1.(b), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$.

Ainsi :

$$\text{la série } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k2^k} \text{ converge et on a } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2.$$

A.2.(a) Comme la suite $\left(\frac{1}{k2^k}\right)_{k \geq 1}$ converge (vers 0 puisque $2 > 1$), la série télescopique $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)$ converge et on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2}.$$

La série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)$ converge et a pour somme $\frac{1}{2}$.

A.2.(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{k(k+1)2^k} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)2^k} = \frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^k} = \frac{1}{k2^k} - \frac{2}{(k+1)2^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{k(k+1)2^k} = \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right) - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.$$

A.2.(c) Comme les séries $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k2^k}$ convergent, on en déduit par linéarité que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \ln 2.$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ converge et on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln 2$.

A.3.(a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

On a donc :

- $u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n^2} \geq 0$.
- La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$) donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ aussi.

Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n+1})$ converge et donc :

la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

A.3.(b) Par télescopage, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel que l'on note γ . On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$ d'où $H_n - \ln n - \gamma = o(1)$.

Ainsi :

il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

A.3.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on obtient :

$$\tau_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{2p+1}}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+1+1}}{2p+1} = -\sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} = -\frac{1}{2}H_n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}.$$

De même :

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{2}H_n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}.$$

Par différence des deux égalités obtenues, on obtient alors $\tau_{2n} - H_{2n} = -H_n$ d'où :

$$\boxed{\tau_{2n} = H_{2n} - H_n.}$$

A.3.(d) La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est une série alternée car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geq 0$.

De plus, la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0.

D'après le critère de Leibniz, on en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Par propriété des suites extraites, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{2n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Or, on a d'après ce qui précède :

$$\tau_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

Ainsi par unicité de la limite :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.}$$

A.4.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k)}{n2^{n+1}n! \prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{\prod_{\ell=1}^{2n} \ell}{n2^{n+1}n! \left(\prod_{k=1}^n 2\right) \left(\prod_{k=1}^n k\right)} = \frac{(2n)!}{n2^{n+1}n!2^n n!}$$

d'où :

$$\boxed{a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}.$$

A.4.(b) On a d'après la formule de Stirling : $a_n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{n2^{2n+1} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} 2\sqrt{\pi} \sqrt{n}}{n2^{2n+1} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n}$ donc :

$$\boxed{a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}.}$$

A.4.(c) On a donc :

► $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}} \geq 0$.

► La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($\frac{3}{2} > 1$) donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ aussi.
Par théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

B.1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme toutes les séries en jeu convergent, on a par linéarité :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - 0 - \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

par télescopage et glissement d'indice.

Comme $\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$, on en déduit que :

$$V_n = \frac{2}{(n+1)2^{n+1}} - R_n \text{ d'où } \boxed{V_n = \frac{1}{(n+1)2^n} - R_n}.$$

B.1.(b) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n+1$, $2^k k(k+1) \geq 2^k k(n+2) > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{2^k k(k+1)} \leq \frac{1}{n+2} \frac{1}{2^k k}$.

Par somme (les deux séries en jeu convergent), on en déduit que $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

Comme $R_n > 0$, on a alors $0 \leq \frac{V_n}{R_n} \leq \frac{1}{n+2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{R_n} = 0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{V_n = o(R_n)}.$$

B.1.(c) D'après B.1.(a), on a $R_n + V_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Or, $R_n + V_n = R_n + o(R_n)$ donc $R_n + V_n \sim R_n$ et $\frac{1}{(n+1)2^n} \sim \frac{1}{n2^n}$.

On en déduit par transitivité que :

$$\boxed{R_n \sim \frac{1}{n2^n}}.$$

B.2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Par la question A.1.(a) appliquée avec $x = 1 \in]-1, +\infty[$, on obtient :

$$\boxed{S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt}.$$

B.2.(b) La fonction $v : t \mapsto \frac{1-t}{1+t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $v'(t) = \frac{-2}{(1+t)^2}$.

On pose alors $u = \frac{1-t}{1+t}$. On a $du = \frac{-2}{(1+t)^2} dt$.

Lorsque $t = 0$ alors $u = 1$ et lorsque $t = 1$ alors $u = 0$.

On a aussi $1+t = \frac{2}{1+u}$.

On en déduit :

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n (1+t) \frac{1}{(1+t)^2} dt = (-1)^n \int_0^1 u^n \frac{2}{1+u} \frac{1}{2} du$$

d'où :

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

B.2.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \left[\frac{1}{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

On en déduit :

$$S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

B.2.(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} \leq t^{n+1}$ donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \left[\frac{1}{n+2} t^{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt = 0$.

Par suite, $\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt = o\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ donc $S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + o\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right) \sim \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

$$S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}.$$

B.3.(a) On a déterminé dans la question A.4.(c) que $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

Cela signifie que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}} = 1$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, on a :

$$\left| \frac{a_k}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}} - 1 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{a_k}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}} \leq 1 + \varepsilon \Leftrightarrow (1 - \varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}} \leq a_k \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}.$$

B.3.(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1, +\infty[$, on a pour tout $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}}$.

Par croissance de l'intégrale (les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[k, k+1]$), on obtient : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^{3/2}} dt = \frac{1}{k^{3/2}}(k+1-k) = \frac{1}{k^{3/2}}$.

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1, +\infty[$, on a pour tout $t \in [k-1, k]$: $\frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\frac{1}{k^{3/2}} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^{3/2}} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^{3/2}} dt$.

D'où :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{3/2}}$$

B.3.(c) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $N \leq n \leq p-1$. On a d'après les questions B.3.(a) et (b) :

$$(1 - \varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^{3/2}} \leq \sum_{k=n+1}^p a_k \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^{3/2}}$$

et

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^{3/2}} = \sum_{k=n+1}^p \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^{3/2}} \leq \sum_{k=n+1}^p \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{3/2}} = \int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

On en déduit :

$$(1 - \varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \sum_{k=n+1}^p a_k \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

B.3.(d) On a $\int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}} = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}} \right]_n^p = \frac{-2}{\sqrt{p}} + \frac{2}{\sqrt{n}}$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

De même, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Par suite, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans les inégalités obtenues en B.3.(c), on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leq T_n \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ainsi :

$$(1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{T_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \leq 1 + \varepsilon.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$, on en déduit qu'il existe $N_1 > N$ tel que pour $n \geq N_1$, on ait :

$$1 - 2\varepsilon \leq (1 - \varepsilon)^2 \leq (1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq T_n \sqrt{\pi n} \leq 1 + \varepsilon \leq 1 + 2\varepsilon.$$

On a ainsi obtenu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ alors $\left| \frac{T_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} - 1 \right| \leq 2\varepsilon$ ce

qui signifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} = 1$ c'est-à-dire :

$$T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

B.4.(a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_{k-1} - R_k = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \frac{1}{\ell 2^\ell} - \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell 2^\ell} = \frac{1}{k 2^k}$.

On a alors :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_{k-1} - R_k}{k+1}.$$

B.4.(b) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_{k-1} - R_k}{k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_{k-1}}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{k+1} \quad (*) \\ &= \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{R_\ell}{\ell+2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{k+1} \\ &= \frac{R_n}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

(*) car les séries $\sum \frac{R_{k-1}}{k+1}$ et $\sum \frac{R_k}{k+1}$ convergent.

En effet, par B.1.c), on a $\frac{R_{k-1}}{k+1} \sim \frac{1}{(k-1)2^{k-1}(k+1)} \sim \frac{2}{k^2 2^k} = o\left(\frac{1}{2^k}\right)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k^2 2^k} \geq 0$, $\frac{1}{2^k} \geq 0$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$ converge ($-1 < \frac{1}{2} < 1$).

Et on a $\frac{R_k}{k+1} \sim \frac{R_k}{k+2}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{R_k}{k+2} \geq 0$ et la série $\sum \frac{R_k}{k+2}$ converge par ce qui précède.

$$V_n = \frac{R_n}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right).$$

B.4.(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n+1$, $\frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{(n+1)2^k}$ donc par somme (séries convergentes), on obtient :

$$R_n \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n+1} \frac{1/2^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, R_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n+1$:

$$\frac{R_k}{(k+2)(k+1)} \leq \frac{1}{(k+1)2^k(k+2)(k+1)} \leq \frac{1}{(n+2)k(k+1)2^k} \text{ car } k+1 \geq n+2 \text{ et } k+2 \geq k.$$

Par somme (séries convergentes), on a en déduit :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)}}{V_n} \leq \frac{1}{n+2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)}}{V_n} = 0$ c'est-à-dire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} = o(V_n).$$

B.4.(d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{R_n}{n+2} = V_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) = V_n - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} = V_n + o(V_n) \sim V_n.$$

Par ailleurs, $\frac{R_n}{n+2} \sim \frac{1}{n^2 2^n}$.

Par transitivité, on en déduit :

$$V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}.$$

B.5. Le reste en valeur absolue est la distance entre la somme partielle et la somme de la série. La rapidité avec laquelle le reste tend vers 0 indique donc la vitesse de convergence de la série. Or, selon l'échelle de comparaison suivant la relation de négligeabilité, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \gg \frac{(-1)^n}{2n} \gg \frac{1}{n2^n} \gg \frac{1}{n^2 2^n}.$$

La série qui converge le plus rapidement est donc la série correspondant au reste V_n et celle qui converge le moins rapidement est celle correspondant au reste T_n .

Ainsi :

La série qui converge le plus rapidement est la série $\sum \frac{1}{n(n+1)2^n}$
et celle qui converge le moins rapidement est la série $\sum a_n$.