Devoir Surveillé n° 1.
le 22 septembre.

Problème : Anneau des entiers de Gauss

Un anneau A commutatif est dit principal lorsque tout idéal de A est engendré par un élément.

1. Donner deux exemples d'anneaux principaux.

Propriétés de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$

On appelle entier de Gauss un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs : $u = a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On désigne par $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des entiers de Gauss.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Est-il intègre ? Est-ce un corps ?

3. **a)** Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{Z}[i]$, $|u|^2$ est un entier naturel.

b) Montrer que u est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $|u| = 1$.

c) En déduire l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que c'est un groupe cyclique et en donner un générateur.

4. **a)** Pour u et v des éléments de $\mathbb{Z}[i]$, montrer que si u divise v dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $|u|^2$ divise $|v|^2$ dans $\mathbb{N}$.

b) $2 + i$ et $2 - i$ sont-ils des diviseurs de $4 + 7i$ dans $\mathbb{Z}[i]$? La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

c) On considère la relation binaire : $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u$ et v sont associés. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence d'un élément $u = a + ib$ de $\mathbb{Z}[i]$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$?

5. **a)** Montrer que, pour tout nombre complexe z, il existe un entier de Gauss u tel que $|z - u| < 1$. On pourra s'appuyer sur un dessin pour construire l'entier de Gauss u.

b) En déduire que, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{Z}[i]^2$, avec $v \neq 0$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $u = vq + r$ avec $|r| < |v|$.

c) Le couple (q, r) est-il unique ? Déterminer toutes les solutions $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ pour $u = 1-i$ et $v = 2i$.

6. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

Irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$

Un entier de Gauss u, non nul est non inversible, est dit irréductible lorsque : $\forall x, y \in \mathbb{Z}[i]$,

$$xy = u \Rightarrow x \in (\mathbb{Z}[i])^* \text{ ou } y \in (\mathbb{Z}[i])^* .$$

7. Montrer que, si $|u|^2$ est premier dans $\mathbb{N}$, alors u est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

8. Les entiers 2 et 3 sont-ils irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$? La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

9. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}[i]$ non inversible a un diviseur irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
Indication : on pourra résonner par récurrence forte sur $|x|^2$.

10. Montrer que si $x \in \mathbb{Z}[i]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $\bar{x}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

On admet pour la suite que pour $u \in \mathbb{Z}[i]$ irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ et $x, y \in \mathbb{Z}[i]$:

$$u \mid (x \times y) \Rightarrow u \mid x \text{ ou } u \mid y.$$

11. Montrer que, si $u = a + ib$, avec $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $|u|^2$ est premier dans $\mathbb{N}$.

12. Montrer que la somme de deux carrés d'entiers relatifs n'est jamais congrue à 3 modulo 4.
Montrer qu'un entier naturel congru à 3 modulo 4 premier dans $\mathbb{N}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

13. On admet qu'un entier naturel congru à 1 modulo 4 premier dans $\mathbb{N}$ est toujours somme de deux carrés d'entiers naturels ; en déduire qu'il n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

14. Quel est l'ensemble des éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$?

Exercice 1 : Nilpotents

On considère un anneau $(A; +; \times)$. Un élément a de l'anneau $(A; +; \times)$ est dit **nilpotent** quand il existe un entier naturel n dans $\mathbb{N}$ avec $a^n = 0_A$. On notera $\mathcal{N}_A$ l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau $(A; +; \times)$.

1. Quelques exemples

a) Déterminer $\mathcal{N}_A$ pour un anneau intègre A.

b) Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau usuel $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

c) Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

d) Soit p un nombre premier et $\alpha \geqslant 2$ un entier. On considère l'anneau $B = \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$.
Vérifier que l'ensemble $B^\times$ des inversibles de B et $\mathcal{N}_B$ forment une partition de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$.

2. Structure

a) Montrer que si a et b de A sont nilpotents et commutent, alors $a + b$ est aussi nilpotent.

b) Pour a et b dans A, vérifier que si ab est nilpotent alors ba aussi.

c) Montrer que si A est un anneau commutatif, alors $\mathcal{N}_A$ est un idéal de A.

Exercice 2

On rappelle qu'un nombre réel est dit *rationnel* s'il appartient à $\mathbb{Q}$, et qu'il est dit *irrationnel* sinon.
Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la fraction p/q est dite *irréductible* si les entiers p et q sont premiers entre eux.

1. *Recherche d'un polynôme à coefficients entiers dont* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *est racine*

(a) Exprimer simplement les valeurs de $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exprimer de même $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

(b) Déterminer les racines complexes de l'équation $z^5 + 1 = 0$.

Calculer leur somme, puis en déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ sont racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$.

Exprimer alors à l'aide de $\sqrt{5}$ les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

2. *Irrationnalité de* $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ *lorsque* $\frac{k}{5}$ *est irréductible*

(a) En utilisant l'irrationalité du réel $\sqrt{5}$ montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ sont irrationnels.

(b) Établir, si $k \in \mathbb{N}$ et si $\frac{k}{5}$ est irréductible, que les réels $\cos\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)$ sont irrationnels.