

Chapitre 5

Techniques de calcul en analyse

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1 Compatibilité avec les opérations

Proposition 1.1

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $x + z \leq y + t$.
2. Si $x \leq y$ et $z \geq 0$, alors $xz \leq yz$.
3. Si $x \leq y$ et $z \leq 0$, alors $yz \leq xz$.
4. Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$, alors $0 \leq xz \leq yt$.
5. Si $0 < x \leq y$, alors $1/y \leq 1/x$, et de même avec des inégalités strictes.
6. Si $x \leq y < 0$, alors $1/y \leq 1/x$, et de même avec des inégalités strictes.

Remarques.

1. On ne peut pas soustraire des inégalités.
2. Attention aux cas des inégalités strictes, qui peuvent être subtiles. Pour la somme, si l'une des inégalités de départ est stricte, l'inégalité obtenue est stricte. Mais c'est faux pour le produit : on a $2 < 3$ et $0 \leq 0$, mais bien sûr $0 \times 2 < 0 \times 3$ est faux.
3. Attention au passage à l'inverse : si $x < 0$ et $y > 0$, on a $1/x < 1/y$.

Méthode 1.2 (Soustractions et inégalités)

Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $-t \leq -z$ donc $x - t \leq y - z$ par somme d'inégalités.

Méthode 1.3 (Multiplication d'inégalités)

Pour multiplier des inégalités, on se ramène, si possible, à des inégalités entre nombres positifs.

Remarque.

Attention : si $x \leq 0 \leq y$ et $x' \leq 0 \leq y'$, on ne peut rien dire sur xx' et yy' : tout est possible. Par exemple, $-2 < 3$ et $-6 < 2$, mais $12 > 6$.

1.2 Valeur absolue**Définition 1.4 (Valeur absolue)**

La *valeur absolue* de $x \in \mathbb{R}$ est le réel positif $|x|$ défini par

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}_+$. Alors

1. On a : $x^2 = y^2 \iff |x| = |y|$.
2. On a : $x = 0 \iff |x| = 0$.
3. $|x| \leq a$ si et seulement si $x \leq a$ et $-x \leq a$.
4. $|y - x| \leq a$ si et seulement si $x - a \leq y \leq x + a$.
5. $|xy| = |x||y|$.
6. On a : $x = 0 \iff \forall h > 0, |x| \leq h$.
7. Pour $m, M \in \mathbb{R}$, on a $m \leq x \leq M \implies |x| \leq \max(|m|, |M|)$.

Remarque.

Le point 4 de la proposition ?? signifie que y est à une distance au plus a de x si et seulement si y est dans l'intervalle $[x - a, x + a]$.

Proposition 1.6 (Inégalités triangulaires)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Corollaire 1.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels. Alors $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.

Méthode 1.8 (Majorer-minorer une somme, un produit, un quotient)

Il y a des techniques à essayer systématiquement. Parfois, elles n'aboutissent pas, et il faut alors chercher une autre idée. Mais dans tous les cas, il faut quand même essayer.

1. Pour majorer une somme/différence en valeur absolue, on peut utiliser l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$.

2. Pour minorer une somme/différence, on peut utiliser l'inégalité triangulaire $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
3. Pour majorer (resp. minorer) une somme, on peut majorer (resp. minorer) chacun des termes qu'on ajoute, et minorer (resp. majorer) les termes qu'on retranche.
4. Pour majorer (resp. minorer) un produit dont tous les facteurs sont positifs, on peut majorer (resp. minorer) chacun des facteurs. On se souviendra que la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues.
5. Pour majorer (resp. minorer) un quotient dont les numérateur et dénominateur sont positifs, on peut majorer (resp. minorer) le numérateur et minorer (resp. majorer) le dénominateur.
6. De manière générale, lorsqu'on connaît l'inégalité à démontrer, on peut la transformer en raisonnant par équivalences.
7. Il est plus simple de majorer que de minorer. En général, on part de l'expression dont on veut montrer qu'elle est plus petite, et on la majore.
8. Une somme admet toujours comme minorant le nombre de termes multiplié par le plus petit, et comme majorant le nombre de termes multiplié par le plus grand.

Exemples.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, encadrez $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 4}$.
2. Pour $x, y \in [0, 1]$, encadrez $\frac{x + y}{1 + xy}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrez que $\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{1 + |\sum_{k=1}^n z_k|} \leq \frac{\sum_{k=1}^n |z_k|}{1 + \sum_{k=1}^n |z_k|}$.
4. Montrez que pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
5. Majorez $(x + \sin(x))(7 - x)$ pour $x \in [2, 4]$.

Remarque.

Nous verrons d'autres situations en td, et en particulier dans le td sur les suites.

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2.1 (Intervalles de $\mathbb{R}$)

Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I.$$

On rappelle que pour $a \leq b$, on définit les intervalles

$$]a, b[, \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad [a, b], \quad]-\infty, b[, \quad [-\infty, b], \quad]-\infty, +\infty[, \quad]a, +\infty[, \quad [a, +\infty[.$$

Définition 2.2

L'ensemble vide et les ensembles réduits à un point sont des intervalles, appelés *intervalles triviaux*. Un intervalle non trivial est donc un intervalle contenant au moins deux points.

Remarque.

Les intervalles non triviaux sont les intervalles dont les bornes a et b vérifient $a < b$.

Proposition 2.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors I est un des 9 intervalles précédents.

Définition 2.4 (Intérieur d'un intervalle)

L'intérieur d'un intervalle dont les bornes sont a et b , avec $a \leq b$, est l'intervalle $]a, b[$.

Exemples.

1. L'intérieur de $[2, 3[$ est $]2, 3[$.
2. L'intérieur de $] - \infty, 5]$ est $] - \infty, 5[$.

Proposition 2.5

Un intervalle est non trivial si et seulement s'il est d'intérieur non vide.

3 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles

Dans ce §, X désigne un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^X$ ou $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On rappelle aussi que si $f \in \mathbb{R}^X$, on utilise la notation

$$\begin{array}{ccc} f : & X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

Il est très important de faire la différence entre la fonction f et le réel $f(x)$ (quand $x \in X$).

3.1 Rappels

1. Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des x tel que l'expression $f(x)$ est définie.
2. Si on fixe un repère $\mathcal{R}$ du plan, la courbe représentative (ou graphe) d'une fonction $f \in \mathbb{R}^X$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in X$.
3. Si x est dans le domaine de définition d'une fonction f , alors $f(x)$ est l'image par f de x , et que si $y \in \mathbb{R}$, un réel x tel que $y = f(x)$ est **un** antécédent de y par f (notez l'article indéfini : il peut y avoir plusieurs antécédents pour un même y).
4. Il faut toujours commencer par déterminer l'ensemble de définition d'une fonction. On procède en réunissant toutes les conditions que doit vérifier un réel pour être dans le domaine de définition, et ainsi déterminez l'ensemble qui correspond à ces conditions. Donnons une méthode sur un exemple.

Méthode 3.1

Pour déterminer le domaine de définition D_f de la fonction $f : x \longrightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-8}\right)$, on procède ainsi :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-8 \neq 0 \\ \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-8} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2 > 0 \\ x^2-8 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]-2, +\infty[\\ x \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[\end{cases},$$

dont on déduit que $D_f =]2\sqrt{2}, +\infty[$.

3.2 Parité, périodicité

Dans ce paragraphe, on fixe un repère **orthonormal** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Tous les graphes seront dans ce repère.

On peut parfois réduire le domaine d'étude d'une fonction (et donc le temps de travail) en utilisant des arguments de périodicité et/ou de parité.

Définition 3.2 (Sous-ensemble symétrique par rapport à 0)

Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 si :

$$\forall x \in X, -x \in X.$$

Définition 3.3 (Parité)

Soit $f \in \mathbb{R}^X$. La fonction f est paire (resp. impaire) si X est symétrique par rapport à 0 et si

$$\forall x \in X, f(-x) = f(x) \text{ (resp. } f(-x) = -f(x)).$$

Remarque.

Il est essentiel de vérifier l'éventuelle parité ou imparité d'une fonction avant de commencer son étude. Cela permet de faire une étude que sur $X \cap \mathbb{R}_+$.

Proposition 3.4 (Graphe d'une fonction paire/impaire)

1. La courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe représentative d'une fonction impaire dans tout repère est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple.

Les fonctions $\sin$, $\cos$, $\tan$, et x^n , $\sqrt[n]{x}$

Définition 3.5 (Périodicité)

Soit $f \in \mathbb{R}^X$. La fonction f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall x \in X, (x+T \in X \text{ et } f(x+T) = f(x)).$$

Dans ce cas, la fonction f est T -périodique, et le réel T est une période de f .

Remarques.

1. Une période n'est jamais nulle.
2. Si f est périodique, elle admet une infinité de périodes. En effet, si T est une période, pour tout entier naturel n , nT est une période.
3. Si f est T -périodique, on ne fait l'étude de f que sur un ensemble du type $X \cap [a, a + T]$, où $a \in X$. On obtient toute la courbe représentative de f par des translations de vecteur $T \vec{i}$ (si $\vec{i}$ est le premier vecteur du repère).

Exemples.

1. Graphe d'une fonction périodique.
2. Les fonctions trigonométriques.
3. Les fonctions constantes.
4. La fonction valant 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 ailleurs (*fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$*) est périodique et l'ensemble de ces périodes est $\mathbb{Q}^*$. En effet, en notant f cette fonction, on a pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathbb{Q} \iff x + r \in \mathbb{Q}.$$

On en déduit que $f(x) = f(x + r)$, donc tous les rationnels non nul sont une période. Mais réciproquement, si $r \in \mathbb{R}$ est une période, alors $f(0) = f(r)$, donc $r \in \mathbb{Q}$.

5. Résolution graphique de $y = f(x)$.

3.3 Majoration, minoration**Définition 3.6**

Soit $f \in \mathbb{R}^X$.

1. La fonction f est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X, f(x) \leq M.$$

2. La fonction $f \in \mathbb{R}^X$ est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X, m \leq f(x).$$

3. La fonction f est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 3.7

La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est bornée.
2. La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas majorée, mais est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3.8 (Maximum, minimum)

Soit $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

1. La fonction f admet un *maximum* en $a \in X$ si

$$\forall x \in X, f(x) \leq f(a).$$

2. La fonction f admet un *minimum* en $a \in X$ si

$$\forall x \in X, f(a) \leq f(x).$$

3. La fonction f admet un *extremum* en $a \in X$ si elle admet un minimum ou un maximum en a .

Remarque.

On définit ici rien d'autre que le maximum et le minimum de l'ensemble $f(X) = \{f(x), x \in X\}$, s'ils existent.

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ admet 1 comme maximum (atteint en 0), mais n'admet pas de minimum.
2. La fonction $x \mapsto x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1 (qui vaut 2), un minimum local en 1 (qui vaut -2), mais ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}$.

3.4 Fonctions monotones

Dans ce §, on fixe encore $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

Définition 3.9

Soit $f \in \mathbb{R}^X$.

1. La fonction f est croissante sur X si

$$\forall x, x' \in X, x \leq x' \implies f(x) \leq f(x').$$

2. La fonction f est décroissante sur X si

$$\forall x, x' \in X, x \leq x' \implies f(x) \geq f(x').$$

3. La fonction f est strictement croissante sur X si

$$\forall x, x' \in X, x < x' \implies f(x) < f(x').$$

4. La fonction f est strictement décroissante sur X si

$$\forall x, x' \in X, x < x' \implies f(x) > f(x').$$

5. La fonction f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

6. La fonction f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 3.10

Soit $f \in \mathbb{R}^X$ une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante). Pour $x, x' \in X$, on a

$$x \leq x' \iff f(x) \leq f(x') \quad (\text{resp. } x \leq x' \iff f(x) \geq f(x')).$$

Remarque.

C'est faux si la fonction est simplement croissante (ou décroissante), comme le prouve l'exemple d'une fonction constante.

Proposition 3.11

1. La somme de deux fonctions monotones de même sens est monotone.
2. Le produit de deux fonctions positives et monotones de même sens est une fonction monotone.

Exemples.

1. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont strictement monotones sur $\mathbb{R}$, mais leur somme ne l'est pas.
2. Les homographies : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

est strictement monotone sur $] -\infty, -d/c[$ et sur $] -d/c, +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$. En effet, si $x, y \neq -d/c$, on a

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{ad - bc}{(cx + d)(cy + d)}.$$

3. La fonction

$$x \mapsto \ln \left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2} \right)$$

est monotone comme composée des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (2x + 1)/(x + 2)$ (sur $\mathbb{R}_+^* \subset] -2, +\infty[$) et $x \mapsto \ln(x)$. De plus, $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f(\ln(2)) = \ln(5/4) > 0$, donc f est croissante.

4. Attention, le produit de deux fonctions monotones n'est pas monotone en général. Par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont croissantes sur $[0, \pi/2]$, mais leur produit $x \mapsto \sin(2x)/2$ ne l'est pas. De même avec les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.5 Opérations sur les fonctions

On fixe $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

Définition 3.12 (Somme et produit de fonctions)

Soient $f, g \in \mathbb{R}^X$.

1. On définit la somme de f et g (notée $f + g$) par

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. On définit le produit de f et g (notée fg) par

$$\forall x \in X, (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Définition 3.13 (Composée de fonctions)

Soient $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^X$, $g \in \mathbb{R}^Y$, telles que $f(x) \in Y$ pour tout $x \in X$. La composée de f et g (notée $g \circ f$) est la fonction définie sur X par

$$\forall x \in X, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple.

avec $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x + 1$, faire les deux composées : elles sont différentes.

Proposition 3.14

La composée de deux fonctions monotones est monotone. Plus précisément, si elles sont monotones de même sens, la composée est croissante, décroissante sinon.

3.6 Asymptotes

Définition 3.15 (Asymptotes verticales)

Une fonction f définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si une des quatres conditions suivantes est vérifiée :

1. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$.
2. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$.
3. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} +\infty$.
4. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -\infty$.

Définition 3.16 (Asymptotes horizontales)

Une fonction f définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = b.$
2. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} = b.$

Définition 3.17 (Asymptotes obliques)

Une fonction f définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $(f(x) - ax - b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = 0.$
2. $(f(x) - ax - b) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} = 0.$

Méthode 3.18 (Déterminez les asymptotes obliques et les directions asymptotiques)

En $+\infty$ par exemple.

1. Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (ou $-\infty$), le graphe de f admet une branche parabolique de direction Oy .
2. Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction Ox .
3. Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}^*$, le graphe de f admet une direction asymptotique de pente a . Si de plus $f(x) - ax \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}$, le graphe de f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$.

4 Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Dans ce §, on rappelle la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. On introduit les formules de calcul des dérivées de sommes, produits, composées, réciproques, et on applique ces résultats à l'étude de fonctions.

4.1 Définitions

Définition 4.1 (Dérivée)

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathbb{R}^I$. Soit $a \in I$.

1. La fonction f est *dérivable* en a si le taux d'accroissement de f en a

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a , et dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite, appelée nombre dérivé de f en a .

2. La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, la *dérivée* de f est la fonction

$$\begin{array}{ccc} f' & I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Remarques.

1. On rappelle le vocabulaire de *taux d'accroissement en a* .
2. Si f est dérivable en a , la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ a pour pente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

et les cordes ont une droite limite de pente $f'(a)$, qui est la tangente au graphe de f (dans un repère fixé). La tangente a pour équation (dans ce même repère) $y = (x - a)f'(a) + f(a)$.

Exemples.

1. Les fonctions affines $x \rightarrow \alpha x + \beta$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur dérivée est constante égale à α .
2. La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $a > 0$, on a

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

qui admet

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

comme limite en a .

3. La fonction $x \rightarrow x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car si $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

qui admet $2a$ comme limite en a .

4. De même, tout monôme $x \rightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ car

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}$$

qui admet na^{n-1} comme limite en a .

5. La fonction définie pour $x \neq 0$ par $x \rightarrow x \sin(1/x)$, et par 0 en 0, est continue mais pas dérivable en 0. En effet, le taux d'accroissement en 0 vaut

$$\frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

qui n'admet pas de limite en 0.

6. sinus etc., $\ln|x|$, $\exp$, $1/x^n$

Méthode 4.2

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dérive la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ en écrivant que $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

De même avec $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, qui se dérive en écrivant que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

4.2 Opérations usuelles

Proposition 4.3 (Dérivation d'une somme)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{D}(I)$. Alors $f + g$ est dérivable sur I et

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Proposition 4.4 (Dérivation de λf)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{D}(I)$. Alors λf est dérivable sur I et

$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

Proposition 4.5 (Dérivation d'un produit)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{D}(I)$. Alors le produit fg est dérivable sur I et on a

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Proposition 4.6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{D}(I)$ telle que g ne s'annule pas sur I . Alors la fonction f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemple.

Les fonctions homographiques

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

sont dérivables, et ont pour dérivée

$$x \mapsto \frac{ac - bd}{(cx + d)^2}.$$

4.3 Dérivation de fonctions composées

Proposition 4.7

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f',$$

ou encore :

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x),$$

Méthode 4.8

Pour dériver une fonction qui n'est pas une fonction usuelle, on la décompose en composée de plusieurs fonctions, et on utilise la proposition ??.

Exemple.

Dérivez la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

4.4 Application à l'étude de fonctions

Proposition 4.9 (Monotonie et dérivation)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$. Alors f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I , et f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .

Proposition 4.10 (Strict monotonie et dérivation)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$. Si f' est de signe constant sur I , et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement monotone sur I .

Proposition 4.11 (Recherche d'extremum)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert** I . Si f admet un extremum en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.

Proposition 4.12 (Recherche d'extremum, deuxième)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I . Si f admet un extremum en a dans l'intérieur de I , alors $f'(a) = 0$.

Méthode 4.13

En général, lorsqu'on calcule la dérivée d'une fonction, on veut en étudier le signe pour obtenir le sens de variation de la fonction. Il faut donc impérativement simplifier l'expression de f' au fur et à mesure des calculs, afin d'aboutir à une forme dont le signe est "facile" à étudier (forme factorisée par exemple).

Méthode 4.14

Plan d'étude d'une fonction :

1. Déterminez le domaine de définition et de dérivabilité.
2. Déterminez le domaine d'étude.
3. Limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Calcul de la dérivée avec simplification des calculs.
5. Étude des variations, tableau de variations. **Vérifiez la cohérence avec les limites.**
6. Asymptotes.
7. Courbe représentative si elle est demandée.

Exemple.

Étudiez la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Méthode 4.15

On peut démontrer certaines égalités par une étude de fonction : si on veut montrer que pour tout $x \in I$ (I : intervalle par exemple) $f(x) \leq g(x)$, on peut étudier la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$, pour montrer que c'est une fonction positive.

Exemples.

1. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.
2. Montrez que pour tous $x, y \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq 1$ (étude de $x \mapsto \dots$).

5 Théorème de la bijection

5.1 Fonctions bijectives

Définition 5.1 (Bijection)

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ et $f \in B^A$. La fonction f est une bijection de A dans B si tout élément de B admet un et un seul antécédent par f dans A , ou encore si pour tout $b \in B$, il existe un et un seul $a \in A$ tel que $b = f(a)$.

Exemple.

Avec des graphes, des patates, et $x \mapsto x^2 + 2x + 2$ sur $[-1, +\infty[$.

Définition 5.2

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ une bijection. La bijection réciproque de f est la fonction $B \rightarrow A$ qui à $b \in B$ associe son unique antécédent par f . On la note f^{-1} .

Méthode 5.3

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est bijective si et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $b = f(a)$ d'inconnue $a \in A$ admet une unique solution, et alors, pour tout $b \in B$, $f^{-1}(b)$ est cette solution.

Proposition 5.4

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ une bijection. Alors

1. $\forall a \in A, b \in B, b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$.
2. $\forall a \in A, f^{-1}(f(a)) = a$, ou encore $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$.
3. $\forall b \in B, f(f^{-1}(b)) = b$, ou encore $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.
4. La fonction $f^{-1} : B \rightarrow A$ est une bijection.

Proposition 5.5

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ une bijection. Le graphe de f^{-1} **dans un repère orthonormal** est l'image du graphe de f par la réflexion d'axe la première bissectrice.

5.2 Théorème de la bijection

Théorème 5.6 (Théorème de la bijection)

Soient $I = [a, b]$ ($a < b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I . Alors

1. La fonction f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $J = [f(a), f(b)]$ (si f est croissante, $J = [f(b), f(a)]$ sinon).
2. Sa fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue, strictement monotone, de même monotonie que f .

Exemple.

$$\sqrt{x}, \exp(x)$$

Remarques.

1. On peut remplacer $[a, b]$ par $]a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b[$, en ouvrant les mêmes crochets dans $[f(a), f(b)]$, à condition que f soit continue sur $[a, b]$.
2. Dans le cas par exemple où on considère $]a, b]$ et où f n'est pas définie en a , on peut remplacer $f(a)$ par $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. De même en b avec $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Exemple.

Bijektivité de $\ln$.

5.3 Dérivation des fonctions réciproques

Proposition 5.7

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

$$\text{ou encore : } \forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarques.

1. Si f' s'annule, on peut considérer un sous-ensemble D de I sur lequel f' ne s'annule pas, et alors f^{-1} est dérivable sur $f(D)$.
2. Si $f'(x_0) = 0$, le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse $f(x_0)$.

Exemples.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$x \longmapsto x^n$$

est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dont la dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque

$$y \longmapsto \sqrt[n]{y}$$

est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée a pour expression

$$\frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}},$$

i.e. on a

$$\frac{dx^{1/n}}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

2. Dérivée de la réciproque de $x \mapsto x^2 + 2x + 2$ sur $[-1, +\infty[$.

6 Compétences

1. Savoir manipuler les inégalités strictes/larges avec les opérations $+$, $-$, $\times$, $/$.
2. Savoir démontrer qu'un réel est majoré en valeur absolue.
3. Savoir utiliser les deux inégalités triangulaires. L'une pour majorer : $|x + y| \leq |x| + |y|$ permet par exemple de montrer que $x + y$ tend vers 0 si x et y tendent vers 0, et l'autre pour minorer : $||x| - |y|| \leq |x - y|$ permet par exemple de montrer que $|x|$ tend vers $|y|$ si x tend vers y .
4. Savoir étudier une fonction.
5. Utiliser l'étude d'une fonction pour montrer une inégalité.