

Problème n°1 :**Accordeur de guitare (d'après Centrale-Supélec TSI 2019)****1.A – Le signal**

Q 1. Le signal varie à peu près entre 0 et 20 mV ; la valeur moyenne (c'est-à-dire la composante continue, c'est-à-dire la composante de fréquence nulle) doit être de l'ordre de 10 mV .

Q 2. On perçoit très bien qu'il y a une forme de courbe qui se répète environ toutes les $T \simeq 3,2 \text{ ms}$, donc la « fréquence » de ce signal (on devrait plutôt parler de fréquence fondamentale) est $f = \frac{1}{T} \simeq 0,31 \text{ kHz}$.

Q 3. D'après le tableau 1, il s'agit *a priori* de la corde **Mi aigu**.

Q 4. Oui, l'analyse spectrale de ce signal **fera apparaître des harmoniques** : on voit bien que **le signal, bien que périodique, n'est pas une sinusoïde pure**. Sa décomposition en série de Fourier fera donc apparaître des raies à des fréquences multiples de celle du fondamental.

Q 5. Puisque les deux dipôles sont en série, le théorème du pont diviseur de tension donne :

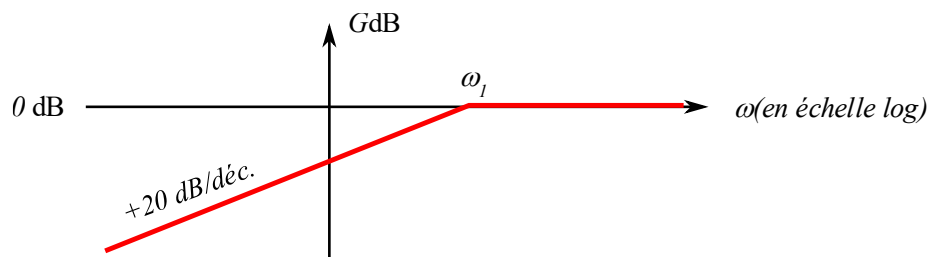
$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

Q 6. On reconnaît la forme canonique d'un **filtre passe-haut d'ordre 1** (et on voit bien que le module de la fonction de transfert tend 0 quand la fréquence tend vers 0, et vers 1 quand la fréquence tend vers l'infini).

On peut encore écrire

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}, \text{ avec } \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} = \text{pulsation caractéristique} = \text{pulsation de coupure à } -3\text{dB}.$$

Q 7. Compte tenu des limites évoquées à la question précédente, on a directement le diagramme de Bode asymptotique relatif au gain :



Q 8. Numériquement, sans calculatrice, $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \simeq 16 \text{ Hz}$.

Au vu du signal de la figure 2, ce premier filtre sert à **éliminer la composante continue**, puisque **sa fréquence de coupure basse est située nettement avant la fréquence du fondamental**.

Q 9. Tout d'abord, une précision de langage : l'énoncé parle de deux filtres pour la figure 4, mais comme on le verra plus loin, le premier sera un amplificateur, pas un filtre.

A l'aide d'un pont diviseur de tension, on obtient immédiatement : $\underline{H} = 1 + \frac{Z'}{Z}$.

Q 10. Si les deux impédances sont des résistances, cela donne $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$. C'est un **amplificateur** (non inverseur).

Q 11. Les deux impédances étant en parallèle, ce sont les admittances qui s'ajoutent, d'où $\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Q 12. Le montage étant du type de celui de la figure 4a, il vient $\underline{H}_2 = 1 + \frac{R_2/R_3}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Q 13. C'est bien la forme demandée, avec $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$.

Q 14. La limite en basse fréquence de $|\underline{H}_2|$ est $1 + \frac{R_2}{R_3}$, et celle en haute fréquence est **1**.

Q 15. La fréquence caractéristique est $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \simeq 0,46 \text{ kHz}$. $G_0 = 117$. Le rôle de ce second système linéaire est de **renforcer le poids du fondamental par rapport aux harmoniques**, ce qui permettra ensuite d'extraire plus facilement le fondamental avec le filtre très sélectif.

Q 16. Le filtre (Fc) est clairement un **filtre passe-bande d'ordre 2** : on devine très bien les asymptotes à +20dB/déc. et à -20 dB/déc. en très basse et très haute fréquence.

Sa fréquence centrale caractéristique est $f_{ac} = 329 \text{ Hz}$ (même 329,6, d'après le tableau 1, mais la lecture graphique ne permet pas une telle précision de lecture).

Q 17. Notons f_b et f_h les fréquences de coupure basse et haute à -3 dB, c'est-à-dire celles pour lesquelles le gain vaut 3 dB de moins que le max. Le max étant 0 dB, ce sont donc les fréquences pour lesquelles le gain vaut -3 dB.

On lit sur la figure 5b : $f_b = 320,5 \text{ Hz}$ et $f_h = 337,5 \text{ Hz}$, d'où $\Delta f_{-3dB} = 17 \text{ Hz}$.

Q 18. Toujours sur la figure 5b, on lit pour $f = 315 \text{ Hz}$ un gain de -6 dB.

Cela signifie que le facteur d'atténuation est de 2 (la raie fondamentale est multipliée par $\frac{1}{2}$, qui est le facteur d'« amplification »).

Q 19. Le spectre de la figure 6 donne bien une raie à fréquence nulle de 10 mV (cf Q1), un fondamental à une fréquence un peu supérieure à 300 Hz ; on peut être plus précis en observant la fréquence de l'harmonique 10 : 3250 Hz, donc le fondamental est à 325 Hz. C'est cohérent avec Q2, sachant que la mesure de la période sur la figure 2 n'était pas précise.

Q20. Le premier filtre (passe-haut d'ordre 1) avait comme seule fonction de supprimer la composante continue, sans modifier les raies de haute fréquence. C'est donc la figure 7a la bonne pour la sortie du filtre Fa.

Q 21. Pour la sortie du filtre Fb, la figure 7b ne convient pas, car toutes les raies de la figure 7a ont été amplifiées d'un même facteur, ce facteur étant de l'ordre de 25.

La figure 7c ne convient pas car il y a une composante continue ; or celle-ci a été éliminée par Fa ; elle ne peut pas être recréée par un système linéaire, qui ne peut que conserver des fréquences existantes, mais ne peut pas en rajouter.

C'est donc la figure 7d qui correspond au filtre Fb. Et, en effet, le facteur d'amplification pour le fondamental est de l'ordre de 100, qui est bien inférieur à 114. Et les raies autour de 4 kHz sont nettement moins amplifiées.

Q 22. En sortie du filtre Fc, il ne reste quasiment plus que le fondamental. Or, celui-ci est à environ 325 Hz, donc l'atténuation n'est que de 1 dB. On a donc comme spectre, une seule raie, d'amplitude quasiment égale à 1,8 V.

Le signal temporel est une belle sinusoïde, qui varie entre environ -1,8 V et +1,8 V. On ne peut pas la dessiner car on n'a aucune information sur la phase.

Q 23. L'absence de rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse permet de dire que l'ALI va fonctionner en régime saturé.

On a donc (ALI idéal en régime saturé) : $u_s(t) = +U_{sat}$ si $V^+ > V^-$ et $u_s(t) = -U_{sat}$ si $V^+ < V^-$.

Q 24. Le théorème du pont diviseur de tension donne $V^+ = \frac{R_4}{R_4 + R_5} u_s$. On en déduit $\varepsilon = \frac{R_4}{R_4 + R_5} u_s - u_3$.

Q 25. Pour u_s fixée, ε décroît quand u_3 croît, et ε croît quand u_3 décroît.

Q 26. Pour $\varepsilon > 0$, $u_s = +U_{sat}$. D'où $\varepsilon = \frac{R_4}{R_4 + R_5} U_{sat} - u_3$. Le basculement de u_s

se fera quand ε passera par la valeur 0, donc pour $u_3 = U_{seuil} = \frac{R_4}{R_4 + R_5} U_{sat}$.

À partir de ce moment, on aura donc $\varepsilon = -\frac{R_4}{R_4 + R_5} U_{sat} - u_3$.

Q 27. Si u_3 diminue, il arrivera un moment où ε repassera par la valeur 0 :

l'ALI basculera à nouveau pour $u_3 = -U_{seuil} = \frac{-R_4}{R_4 + R_5} U_{sat}$.

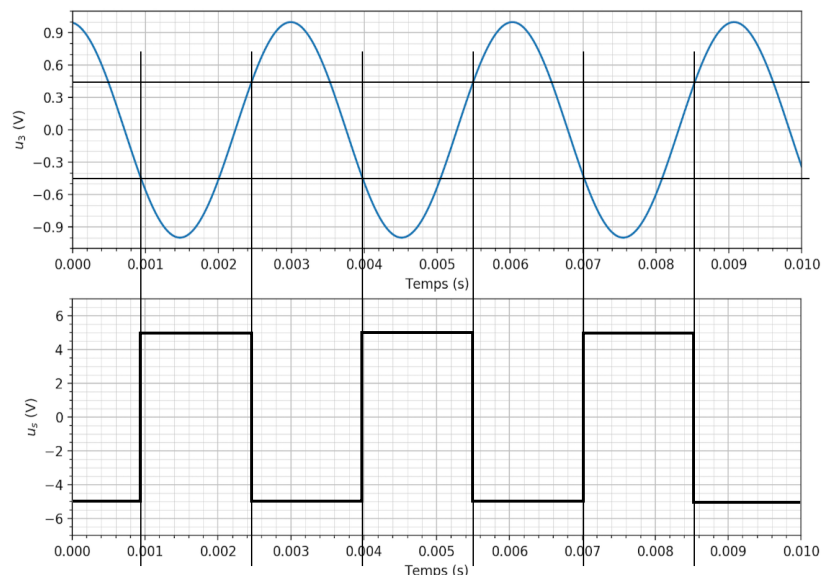
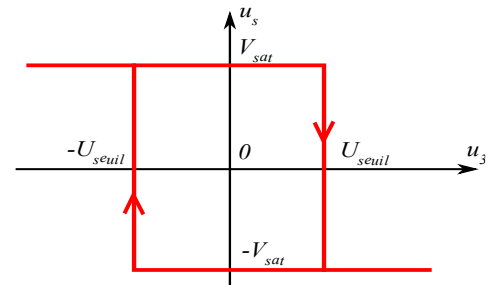
Q 28. Le cycle d'hystérésis est donné ci-contre

Q 29. Avec les valeurs numériques données, $U_{seuil} = 0,45 \text{ V}$, d'où le dessin ci-contre pour le premier signal proposé pour $u_3(t)$.

Pour le second signal proposé pour $u_3(t)$, les valeurs de basculement ne sont jamais atteintes, donc $u_s(t)$ est constant. Mais on ne peut pas savoir si ce sera $+U_{sat}$ ou $-U_{sat}$, ça dépend de ce qui se sera passé (microtensions parasites) au moment où on finira de câbler le circuit.

Q 30. Si la corde est trop désaccordée, la fréquence f_{oc} sera très décalée par rapport à f_{ac} , donc le signal de sortie du filtre Fc sera une sinusoïde de faible amplitude, donc, comme dans le second cas de la question 29,

$u_s(t)$ ne sera pas un créneau mais un signal constant.



Problème n°2 :**Cristallographie****A) Cristallographie du gadolinium métal :**

1. La phase β étant une structure de type cubique centrée, la coordinnence est **Gd/Gd = [8]**.

2. Le nombre d'atomes de gadolinium par maille est $N = \left(8 * \frac{1}{8}\right) + (1 * 1) = 2$, car il

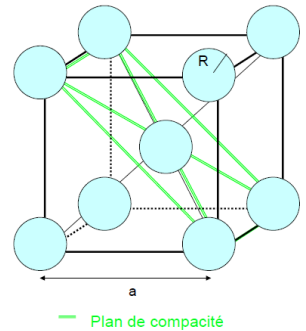
y a un atome à chaque sommet et un atome au centre de la maille.

La masse volumique est
$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = N \frac{m(1 \text{ atome Gd})}{a^3} = 2 \frac{M(\text{Gd})}{a^3 N_a}$$

3. Les atomes de rayon r sont tangents sur la grande diagonale du cube :

$$4r = a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

D'où **$r = 176 \text{ pm}$** Cette valeur est cohérente avec la donnée $r = 180 \text{ pm}$...

**B) L'or :**

4. Schéma de la maille de la structure cubique faces centrées de l'or :

5. La structure est dite compacte donc le taux d'occupation de l'espace est maximal, les atomes modélisés par des sphères dures ayant la coordinnence (nombre de plus proches voisins) la plus élevée possible (12 ici). Les atomes d'or sont au contact suivant la diagonale des faces donc :

$$a\sqrt{2} = 4R_{Au}$$

On obtient avec les données : **$a = 403 \text{ pm}$** .

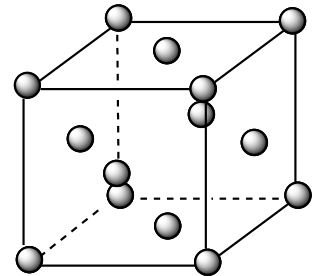
6. Les sites octaédriques se trouvent **au milieu de chaque arête de la maille** et il y en a un au **centre de la maille**, soit 4 sites octaédriques en propre. Le rayon maximal R_o d'un atome pouvant s'y

insérer vérifie : $R_o + R_{Au} = \frac{a}{2}$ On obtient **$R_o = 57 \text{ pm}$** . Le nickel est **trop volumineux** pour venir s'y placer puisque

$R_{Ni} = 124 \text{ pm}$.

7. Il s'agit d'un alliage de **substitution**.

8. L'expression est la suivante : $\rho' = \frac{3M_{Au} + M_{Ni}}{N_A a'^3}$, d'où $a' = \sqrt[3]{\frac{3M_{Au} + M_{Ni}}{N_A \rho'}}$.



Problème n°3 : Centrale PSI

1°) Régime linéaire : $V^+ = V^- = V$. Ici, on n'a pas un véritable « miroir de courant » car les résistances des 2 rebouclages de l'ALI sont différentes. Néanmoins, on a : $RI_1 = R_2 I_2$.

Et puisque $I = I_1$ (d'après la loi des nœuds sur l'entrée inverseuse), $RI = R_2 I_2$.

Or $V_s = -(R_1 + R_2)I_2$, d'où $V_s = -R \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) I$. $V = V^+$ conduit à $V = -R_1 I_2$, d'où $V = -\frac{RR_1}{R_2} I$.

2°) Si $V_s = +V_{sat}$, on a tout de suite $V = RI + V_{sat}$. Si $V_s = -V_{sat}$, on a $V = RI - V_{sat}$.

3°) Les trois résultats précédents sont rassemblés dans le dessin ci-contre.

Si l'ALI n'est pas saturé, on a bien $V = -R_n I$ avec $R_n = \frac{RR_1}{R_2}$.

Dans ce mode de fonctionnement, V_s est lié à I par la relation du 1°).

La saturation haute ($V_s = V_{sat}$) se manifeste pour $V_+ > V_-$,

c'est-à-dire $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s > V$, donc $V < V_0$, avec $V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.

Pour préciser le dessin :

En saturation haute, le raccordement avec le régime de fonctionnement linéaire vérifie à la fois

$V = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ et $V = -\frac{RR_1}{R_2} I$, donc pour $I = -I_0$, en posant

$I_0 = \frac{R_2}{R(R_1 + R_2)} V_{sat}$.

De même $V_s = -V_{sat}$ pour $V_+ < V_-$, c'est-à-dire $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s < V$, donc

$V > -V_0$. Le raccordement avec le fonctionnement linéaire vérifie à la fois $V = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ et $V = -\frac{RR_1}{R_2} I$, donc pour $I = +I_0$.

4°) Deux condensateurs en parallèle : on somme les capacités. D'où $C_{eq} = C_b + C_s$.

5°) schéma équivalent ci-contre :

Loi des nœuds : $I_n = I_b + I_c$. Or $U = + R_n I_n$ (résistance négative et convention générateur).

$I_c = C_{eq} \frac{dU}{dt}$ et $U(t) = R_b I_b + L \frac{dI_b}{dt}$. On se débarrasse de I_b :

$U(t) = R_b \left(\frac{U(t)}{R_n} - C_{eq} \frac{dU}{dt} \right) + L \frac{d}{dt} \left(\frac{U(t)}{R_n} - C_{eq} \frac{dU}{dt} \right)$.

D'où l'équation différentielle attendue avec :

$a = LC_{eq}$, $b = R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n}$ et $c = \frac{R_b}{R_n}$.

6°) il faut que $b=0$. Donc R_n doit valoir $\frac{L}{R_b C_{eq}}$, c'est-à-dire

$R_n = Q^2 R_b$.

7°) $b=0$ ne suffit pas, il faut aussi que $(1-c) > 0$, donc $c < 1$ (sinon, les solutions sont des exponentielles réelles), donc que $R_b < R_n$. La valeur de R_n étant déjà fixée par la condition $b=0$, on obtient l'inégalité $Q^2 > 1$. Donc $Q_{lim} = 1$.

8°) On met l'équation sous la forme $\ddot{U} + \omega^2 U(t) = 0$, avec $\omega = \sqrt{\frac{1-c}{a}}$.

En remplaçant, on aboutit à : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$.

9°) Pour amorcer l'oscillation, il faut un régime sinusoïdal désamorti. C'est le cas si $b < 0$.

Il faut donc que $R_b C_{eq} < \frac{L}{R_n}$, c'est-à-dire que $R_n < Q^2 R_b$.

10°) L'amplitude des oscillations va être limitée par la saturation de l'ALI.

